Untersuchungen über die Darstellung von Invaliditätswahrscheinlichkeiten als analytische Funktionen

---

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades

genehmigt von der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Friedrich-Wilhelms-Universität zu Berlin

von

Willy Schnurr

aus Erfurt

Tag der mündlichen Prüfung: 8. Februar 1939
Tag der Promotion: 30. Oktober 1939

Druck von Thomas & Hubert, Spezialdruckerei für Dissertationen, Weida i. Thür.

Referenten: Professor Dr. P. Riebesell

Professor Dr. A. Klose

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Meinen Eltern!

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548011_0158

A. Einleitung.

1. Bemerkungen zur Invalidität und zur Invaliditätswahrscheinlichkeit.

Wenn man Untersuchungen über Invalidität und über Invaliditätswahrscheinlichkeiten anstellt, ist es wichtig, erst einige Bemerkungen über den Begriff der Invalidität und Invaliditätswahrscheinlichkeit vorauszuschicken. Zunächst muß festgestellt werden, daß es leider keine einheitlich klare Definition des Begriffes der Invalidität in Deutschland gibt[1]. Jede Pensionsversicherung, die Invaliditätswahrscheinlichkeiten aufstellt, kann infolge der Verschiedenheit der Definitionen des Invaliditätsbegriffes zu zahlenmäßig großen Unterschieden ihrer Invaliditätswahrscheinlichkeiten beim Vergleich verschiedener, einander entsprechender Invaliditätstafeln gelangen.

Der Grund der Verschiedenheit der einander entsprechenden Invaliditätswahrscheinlichkeiten ist folgender: Während einige Invaliditätstafeln auf dem Begriff der Vollinvalidität aufgebaut sind, basieren andere auf dem der Berufsinvalidität. Dabei ist als Berufsinvalidität der Zustand anzusehen, der es einem Menschen unmöglich macht, eine Tätigkeit in seinem bisherigen Beruf voll auszufüllen, ihn dagegen in die Lage versetzt, in einem anderen Berufe dieselben Arbeiten wie ein Nichtinvalider auszuführen. Der Zustand der Vollinvalidität läßt die Möglichkeit der Betätigung in einem anderen Berufe nicht zu. Die folgenden Untersuchungen befassen sich nur mit dem Begriff der Vollinvalidität und den auf ihm beruhenden Invaliditätswahrscheinlichkeiten.

Die Invaliditätswahrscheinlichkeit ist im Gegensatz zur Sterbenswahrscheinlichkeit keine einfache biometrische Funktion, sondern hängt außer vom Alter und vom Beruf von wirtschaftlichen Erwägungen und von der Definition der Invalidität ab[2]. In wirtschaftlich schlechten

---

[1] Riebesell, P.: Neumanns Zeitschrift für Versicherungswesen, Nr. 25, 1935.

[2] Schweer, W.: Statistik und Wahrscheinlichkeiten über deutsche Rechtsanwälte, Zeitschrift für die gesamte Versicherungswissenschaft, Band 26, S. 168, Berlin 1926.

Zeiten ist die Zahl neu hinzukommender Invaliditätserklärungen größer als in wirtschaftlich besseren. Diese Erscheinung ist vielfach festgestellt worden.

Die Invaliditätswahrscheinlichkeit, die mit i_y bezeichnet werden soll, wird definiert durch den Quotienten $\frac{J_y}{A_y}$. J_y bedeutet die Anzahl der Invaliden des Alters y, A_y sei die Zahl der Aktiven des Alters y. A_y wird als geschlossener Bestand, d. h. frei von Neuzugängen angenommen.

2. Bisherige Versuche der Darstellung der Invaliditätswahrscheinlichkeiten durch eine analytische Funktion.

Verschiedene Mathematiker haben versucht, die Invaliditätswahrscheinlichkeit durch eine analytische Funktion auszudrücken. Behm[1] nahm an, daß sich die Invaliditätswahrscheinlichkeiten in den um fünf Jahre auseinanderliegenden Altern verdoppeln und kam daher auf folgende Formel:

$$i_y = i_{20} \cdot 2^{\frac{y-20}{5}}.$$

i_{20} bestimmte er aus den Erfahrungen der Knappschaftskassen mit 0,000190 36. Seine Formel lautete daher:

$$i_y = 0{,}000190\,36 \cdot 2^{\frac{y-20}{5}}.$$

Heym[1] stellte die Invaliditätswahrscheinlichkeit durch folgenden Ausdruck dar:

$$i_{y+20} = 0{,}001 + 50^{\frac{y}{59}-1}.$$

Der französische Aktuar Louis Weber fand folgende Beziehung:

$$i_y = \omega + \alpha \cdot \beta^{(y-n)}.$$

Dieser Ausdruck stellt die Gompertz-Makehamsche Formel dar, die von Weber für die Ausgleichung der Invaliditätswahrscheinlichkeiten benutzt wird. In der Formel treten die drei Konstanten α, β und ω auf. Weber[2] nimmt wie die anderen Mathematiker an, daß sich die Invaliditätswahrscheinlichkeit mit dem Alter in geometrischer Progression vermehrt, fügt aber noch einen vom Alter y unabhängigen Faktor hinzu, der das Unfallrisiko in dem gesamten Invaliditätsrisiko berücksichtigen soll.

---

[1] Braun: Österreichische Revue, XXXVII. Jahrgang, Nr. 32, 1912.

[2] Weber, L.: Études sur les tables de mortalité d'invalides, Bulletin de l'Institut des Actuaires français, 1897, 7. Band, S. 185ff.

B. Die Ausgleichung der Invaliditätswahrscheinlichkeiten i_y.

1. Ansatz der e-Funktion.

Wie aus den vorherigen Ansätzen der Darstellung der Invaliditätswahrscheinlichkeiten durch verschiedene Mathematiker hervorgeht, ist immer versucht worden, die Invaliditätswahrscheinlichkeit i_y, entsprechend der Darstellung der Sterbenswahrscheinlichkeit durch das Gompertz-Makehamsche Gesetz, durch eine Exponentialfunktion auszudrücken. Die graphische Darstellung der beobachteten Werte zeigt auch, daß die Invaliditätswahrscheinlichkeiten in niedrigeren Altern langsam, in höheren Altern sehr rasch ansteigen. Eine Funktion, bei der das Wachstum in dieser Weise vor sich geht, ist die e-Funktion. Es liegt daher nahe, den Werten der unausgeglichenen Invaliditätswahrscheinlichkeiten eine Kurve anzupassen, deren analytischer Ausdruck die e-Funktion enthält. Die Invaliditätswahrscheinlichkeit i_y könnte also durch einen exponentiellen Trend dargestellt werden, dessen Basis die Zahl e und dessen Exponent noch zu bestimmen ist.

2. Anwendung und Erklärung des Lorenzschen Verfahrens.

Um die Invaliditätswahrscheinlichkeit i_y durch die e-Funktion ausdrücken zu können, wurde folgender Ansatz gemacht:

$$\log i_y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n.$$

Zwischen den Altern y der Invaliditätswahrscheinlichkeit i_y und dem Argument x der Näherungsfunktion soll eine entsprechende Zuordnung bestehen. Die a_ν seien die Konstanten der Näherungsfunktion. Geht man zur Basis des natürlichen Logarithmensystems über, so ergibt sich:

$$i_y = e^{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n}.$$

Die Invaliditätswahrscheinlichkeit i_y wird also durch einen exponentiellen Trend dargestellt, dessen Basis die Zahl e und dessen Exponent eine ganze rationale Funktion in x ist.

Zur Ausgleichung soll die Methode der kleinsten Quadrate benutzt werden. Zur Bestimmung der Konstanten empfiehlt es sich, die Tschebyscheffschen Polynome einzuführen. Durch ihre Anwendung ergibt sich nämlich der große Vorteil, daß bei Übergang zu einem höheren Näherungsgrad die Berechnung der bereits ermittelten Konstanten nicht mehr neu durchgeführt zu werden braucht.

Die Verwendung der Tschebyscheffschen Orthogonalfunktionen erfolgt in derselben Weise wie in den Arbeiten von Lorenz[1] über konjunkturtheoretische Probleme.

Es wird hierbei von folgendem ausgegangen. Gegeben seien die Beobachtungswerte w_1, w_2, ... w_n einer empirischen Reihe. Die Näherungsfunktion $z = f(x)$ soll der empirischen Kurve nach der Methode der kleinsten Quadrate angepaßt werden. Es besteht also die Forderung:

$$\sum^x (f(x) - w)^2 = \text{Minimum!}$$

Die Näherungsfunktion $z = f(x)$ wird in folgender Form angesetzt:

$$z = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + \ldots . + a_n X_n,$$

wobei die a_ν die Konstanten und die X_ν ganze rationale Funktionen ν. Grades der Variablen x sind. Setzt man diesen Ausdruck für die Näherungsfunktion z in die Minimumbedingung ein, so ist:

$$\sum^x [a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + \ldots . + a_n X_n - w]^2 = \text{Minimum!}$$

Hierbei durchläuft die Veränderliche x sämtliche Werte, für die Beobachtungen vorliegen.

Wird der obige Ausdruck partiell nach den Koeffizienten $a_1, a_2, \ldots a_n$ differenziert, und wird die Ableitung gleich Null gesetzt, so ergeben sich die Momentengleichungen

$$\begin{aligned}
\sum^x [a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + \ldots . + a_n X_n] &= \sum^x w \\
\sum^x [a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + \ldots . + a_n X_n] &= \sum^x w X_1 \\
\sum^x [a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + \ldots . + a_n X_n] &= \sum^x w X_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\sum^x [a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + \ldots . + a_n X_n] &= \sum^x w X_n .
\end{aligned}$$

Die Funktionen X_ν sollen nun den Orthogonalitätsbedingungen genügen. Also:

$$\sum^x X_\nu = 0$$

$$\sum^x X_\nu X_j = 0 \quad \text{für } \nu \neq j.$$

---

[1] Lorenz, P.: Der Trend, Vierteljahreshefte zur Konjunkturforschung, Sonderheft 21, Berlin 1931.

Außerdem wird noch verlangt:

$$\frac{1}{N}\sum\nolimits_x X_\nu^2 = 1.$$

Werden diese Forderungen von den Funktionen erfüllt, so vereinfachen sich die Momentengleichungen und erhalten folgende Form:

$$a_0 = \frac{\sum_x w}{N}$$

$$a_1 = \frac{\sum_x w X_1}{N}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$a_n = \frac{\sum_x w X_n}{N}.$$

Diese Ausdrücke werden zur Berechnung der Koeffizienten benötigt. Aus den Gleichungen ist ersichtlich, daß die Näherungsfunktion mit beliebig vielen Gliedern angesetzt werden kann.

3. Die Funktionen X_i.

Die allgemeine ganze rationale und orthogonale Funktion X_i wird nach Tschebyscheff durch folgende Determinante defininiert:

$$X_i = b_i \begin{vmatrix} x^0 & x^1 & x^2 \ldots\ldots x^n \\ \sum x x^0 & \sum x x^1 & \sum x x^2 \ldots\ldots \sum x x^i \\ \sum x x^1 & \sum x x^2 & \sum x x^3 \ldots\ldots \sum x x^{i+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sum x x^{i-1} & \sum x x^i & \sum x x^{i+1} \ldots\ldots \sum x x^{2i-1} \end{vmatrix}$$

Diese Determinante stellt die Funktion X_i durch eine ganze rationale Funktion i. Grades in x dar. Die in der Determinante auftretenden Potenzsummen sind Konstante, da das Argument x sämtliche den Beobachtungswerten zugeordneten Argumentwerte durchläuft. b_i ist dabei eine Konstante, die so bestimmt wird, daß

$$\frac{1}{N}\sum\nolimits_x X_i^2 = 1$$

ist. Diese Funktion ist, wie man leicht zeigen kann, orthogonal. Das bedeutet, daß die Orthogonalitätsbedingungen:

$$\sum_x X_i = 0$$

$$\sum_x X_i X_j = 0 \qquad i \neq j$$

bestehen. Außerdem ist die Funktion symmetrisch[1]. Um die Funktionen $X_1, X_2, \ldots . X_i$ aus der vorhergehenden Determinante explizit darzustellen, wird die Äquidistanz der Beobachtungswerte vorausgesetzt. Der Mitte des Beobachtungsintervalls wird immer der Argumentwert $x = 0$ zugeordnet. Ferner muß streng unterschieden werden, ob die Anzahl der Beobachtungswerte, die mit N bezeichnet wird, eine gerade oder eine ungerade Zahl ist. Ist N ungerade, so durchläuft das Argument x die Werte

$$-\frac{N-1}{2}, \quad -\frac{N-3}{2}, \quad \ldots . -1, \; 0, \; 1, \; 2 \ldots . \quad \frac{N-3}{2}, \quad \frac{N-1}{2}.$$

Ist N gerade, so durchläuft das Argument x die Werte

$$-(N-1) - (N-3) \ldots . -3, \; -1, \; 1, \; 3 \ldots . (N-3), \; (N-1).$$

Beispiel: Es liegen die beobachteten Invaliditätswahrscheinlichkeiten von Ottaviani vor[2]. Die Anzahl der Beobachtungswerte beträgt $N = 47$. Das Argument x durchläuft daher die den einzelnen beobachteten Invaliditätswahrscheinlichkeiten zugeordneten Werte

$$-23, \; -22, \; -21, \ldots . -2, \; -1, \; 0, \; 1, \ldots . 21.$$

Für $N = 44$, also eine gerade Anzahl von Beobachtungen, durchläuft das Argument x die Werte

$$-43, \; -41, \; -39, \ldots . -3, \; -1, \; +1, \; 3, \ldots . 41, \; 43.$$

Wird die von Tschebyscheff definierte Determinante entsprechend umgeformt, so ergeben sich folgende explizite Ausdrücke für die ganzen rationalen orthogonalen Funktionen:

I. N ungerade:

$$X_{2l+1} = \Delta^l_{i=0} \frac{(x+i)^{(2i+1)}}{\left(\frac{N+1}{2}+i\right)^{(2i+2)}} \begin{Bmatrix} l+i+\frac{1}{2} \\ l \end{Bmatrix} \sqrt{\frac{(4l+3)\frac{N}{2}\left(\frac{N+1}{2}+l\right)^{(2l+2)}}{\left(\frac{N}{2}+l\right)^{(2l+1)}}}$$

[1] Lorenz: Über gewisse Funktionen, die in der mathematischen Konjunkturforschung eine große Rolle spielen. Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 168, Heft 3, 1932.

[2] Atti del II Congresso Italiano di scienza delle assicurazioni, Rom 1933, III. Band.

$$X_{2l} = \Delta_{i=0}^{l} \frac{\left(x - \frac{1}{2} + i\right)^{(2i)}}{\left(\frac{N}{2} + i\right)^{(2i+1)}} \binom{l+i-\frac{1}{2}}{l} \sqrt{\frac{(4l+1)\frac{N}{2}\left(\frac{N}{2}+l\right)^{(2l+1)}}{\left(\frac{N-1}{2}+l\right)^{(2l)}}}$$

II. N gerade:

$$X_{2l+1} = \Delta_{i=0}^{l} \frac{\left(\frac{x}{2} + i\right)^{(2i+1)}}{\left(\frac{N+1}{2} + i\right)^{(2i+2)}} \binom{l+i+\frac{1}{2}}{l} \sqrt{\frac{(4l+3)\frac{N}{2}\left(\frac{N+1}{2}+l\right)^{(2l+2)}}{\left(\frac{N}{2}+l\right)^{(2l+1)}}}$$

$$X_{2l} = \Delta_{i=0}^{l} \frac{\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2} + i\right)^{(2i)}}{\left(\frac{N}{2} + i\right)^{(2i+1)}} \binom{l+i-\frac{1}{2}}{l} \sqrt{\frac{(4l+1)\frac{N}{2}\left(\frac{N}{2}+l\right)^{(2l+1)}}{\left(\frac{N-1}{2}+l\right)^{(2l)}}}$$

Unter dem Symbol $\Delta_i^l = 0$ wird verstanden, daß die l-te endliche Differenz nach i des hinter $\Delta_i^l = 0$ stehenden Ausdrucks gebildet werden soll. Dann soll $i = 0$ werden[1]. Nach diesen Formeln sind die Funktionen im Institut für Konjunkturforschung numerisch berechnet worden. Die Funktionswerte sind bis zum 6. Grad tabelliert worden.

4. Das Lorenzsche Verfahren für den speziellen Fall der Invaliditätswahrscheinlichkeit.

Für die Anpassung der Logarithmen der Invaliditätswahrscheinkeiten i_y durch eine Näherungsfunktion werden die Tschebyscheffschen Polynome X_i benutzt.

Der Ansatz heißt dann:

$$\log i_y = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + \ldots + a_n X_n.$$

Geht man zur Basis des natürlichen Logarithmensystems über, so erhält man:

$$i_y = e^{a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + \ldots + a_n X_n}.$$

Der Exponent der e-Funktion besteht aus einem Näherungspolynom n. Grades, daß sich aus einer Summe ganzer rationaler orthogonaler Funktionen 1., 2., . . . n. Grades in x zusammensetzt und mit den entsprechenden Konstanten $a_0, a_1, \ldots . a_n$ verbunden ist. Dafür kann auch geschrieben werden:

$$i_y = e^{a_0} \cdot e^{a_1 X_1} \cdot e^{a_2 X_2} \ldots . e^{a_n X_n}.$$

Nun wird:

$$e^{a_0} = \alpha_0 \qquad e^{a_2} = \alpha_2$$

$$e^{a_1} = \alpha_1 \qquad e^{a_n} = \alpha_n$$

[1] Vgl. Anmerkung 1 Seite 10.

gesetzt. Außerdem ist nach Definition: $X_0 = 1$. Es ergibt sich daraus folgende Form der Darstellung der Invaliditätswahrscheinlichkeit durch einen Exponentialausdruck:

$$i_y = a_0 \cdot a_1^{X_1} \cdot a_2^{X_2} \cdot \ldots \cdot a_n^{X_n}.$$

Für die praktische Ausgleichung der Invaliditätswahrscheinlichkeiten ist folgende Näherungsfunktion angesetzt worden:

$$\log i_y = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3.$$

Die Funktionen X_i sind hierbei Funktionen 1., 2., 3. Grades in x und werden durch folgende Determinanten dargestellt:

$$X_1 = b_1 \begin{vmatrix} x^0 & x^1 \\ \sum x\, x^0 & \sum x\, x^1 \end{vmatrix}$$

$$X_2 = b_2 \begin{vmatrix} x^0 & x^1 & x^2 \\ \sum x\, x^0 & \sum x\, x^1 & \sum x\, x^2 \\ \sum x\, x^1 & \sum x\, x^2 & \sum x\, x^3 \end{vmatrix}$$

$$X_3 = b_3 \begin{vmatrix} x^0 & x^1 & x^2 & x^3 \\ \sum x\, x^0 & \sum x\, x^1 & \sum x\, x^2 & \sum x\, x^3 \\ \sum x\, x^1 & \sum x\, x^2 & \sum x\, x^3 & \sum x\, x^4 \\ \sum x\, x^2 & \sum x\, x^3 & \sum x\, x^4 & \sum x\, x^5 \end{vmatrix}$$

Zur Ausgleichung wurden die Tafeln von Ottaviani[1] und die Tafel der Reichsversicherungsanstalt für Angestellte 1934 (männliche Versicherte) benutzt. Um die Rechnung bequemer zu gestalten, wurden die Briggschen Logarithmen der mit 10^5 multiplizierten i_y benutzt. Es ist

$$\log 10^5\, i_y = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3$$

oder

$$i_y = e^{(a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3) \overset{e}{\log} 10}$$

$$i_y = a_0 \cdot a_1^{X_1} \cdot a_2^{X_2} \cdot a_3^{X_3},$$

wobei diesmal

$$a_0 = e^{a_0 \overset{e}{\log} 10} \qquad a_2 = e^{a_2 \overset{e}{\log} 10}$$

$$a_1 = e^{a_1 \overset{e}{\log} 10} \qquad a_3 = e^{a_3 \overset{e}{\log} 10}$$

ist. Die Konstanten a_ν wurden nach dem Schema von Tschetwerikoff berechnet.

[1] Vgl. Anmerkung 2, Seite 10.

5. Das Schema von Tschetwerikoff.

Die Konstanten a_ν könnten nach den abgeleiteten Formeln

$$a_0 = \frac{\sum x\, w}{N}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$a_\nu = \frac{\sum x\, w\, X_\nu}{N}$$

durch Produktbildung bestimmt werden. Hierbei ist zur Berechnung der Konstanten a_ν die Methode des russischen Statistikers Tschetwerikoff angewandt worden, die kurz skizziert werden soll.

In dem Schema von Tschetwerikoff stehen in der vierten Kolonne die Beobachtungswerte w_ν. In dem speziellen Falle sind dies die mit 10^5 multiplizierten Logarithmen der Wahrscheinlichkeiten.

Die fünfte Kolonne entsteht durch Summierung der vorhergehenden Kolonne vom untersten und obersten Wert an bis zur Mitte der Kolonne. Die so durch Summierung entstehenden Teilkolonnen werden mit s_0, s_1, $s_2 \ldots s_n$ bzw. mit s_{-0}, s_{-1}, $s_{-2} \ldots s_{-n}$ bezeichnet und bilden die Größen S_0, S_1, $S_2 \ldots S_n$. Die Summierung ist jedoch nicht immer gleich weit durchzuführen. Die Größe der Lücke der Kolonne, die in der Mitte entsteht, hängt davon ab, ob N gerade oder ungerade ist. Sie ist aber sonst unabhängig von der Anzahl der Beobachtungen. Es ist

$$S_0 = s_0 + s_{-0}, \qquad S_1 = s_1 - s_{-1} \qquad S_2 = s_2 + s_{-2}, \ldots.$$

Für die Summen $S_1, S_2, \ldots S_n$ bestehen folgende Bildungsgesetze:

Für ungerades N ist:

$$S_0 = \sum x\, w$$

$$S_1 = \sum x\, w x$$

$$S_2 = \sum x\, w \frac{x(x+1)}{1 \cdot 2}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

Für gerades N ist:

$$S_0 = \sum x\, w$$

$$S_1 = \frac{1}{2} \sum x \frac{w(x-1)(x+1)}{1 \cdot 2}$$

$$S_2 = \frac{1}{2^2} \sum x \frac{w(x-1)(x+1)(x+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

Aus diesen Gleichungen werden $\sum x\, w$, $\sum x\, w x, \ldots$ berechnet und folgende Ausdrücke für gerades und ungerades N erhalten:

$$\sum x\,w = S_0 \qquad \sum x\,w = S_0$$
$$\sum x\,wx = S_1 \qquad \sum x\,wx = 2\,S_1 - S_0$$
$$\sum x\,wx^2 = 2\,S_2 - S_1 \qquad \sum x\,wx^2 = 8\,S_2 + S_0$$

Werden diese Ausdrücke in die Koeffizientengleichungen für a_ν eingesetzt, so ergeben sich folgende explizite Formeln für die Konstanten a_ν. Es ist

$$a_0 = \frac{\sum x\,w}{N} = \frac{S_0}{N}$$

$$a_1 = \frac{\sum x\,wX_1}{N}, \ldots.$$

Wird X_1 nach den vorhin erwähnten Formeln für die Funktion X_i ausgerechnet, so erhält man[1]:

$$X_1(x) = \frac{x}{\left(\frac{N}{2}+\frac{1}{2}\right)^{(2)}} \sqrt{\frac{3\,\frac{N}{2}\left(\frac{N}{2}+\frac{1}{2}\right)^{(2)}}{\frac{N}{2}}} = x\sqrt{\frac{12}{N^2-1}}$$

$$a_1 = \frac{1}{N}\sum x\,wX_1 = \frac{1}{N}\sqrt{\frac{12}{N^2-1}}\sum x\,wx = \frac{1}{N}\sqrt{\frac{12}{N^2-1}}\cdot S_1.$$

Dafür wird geschrieben:

$$a_1 = \frac{S_1}{1000}\sqrt{\frac{12}{N^2-1}}\cdot\frac{1000}{N}.$$

Man setzt:

$$\sqrt{\frac{12}{N^2-1}}\cdot\frac{1000}{N} = k_1$$

und

$$\sqrt{\frac{12}{N^2-1}}\cdot\frac{1000}{N}\cdot\frac{S_1}{1000} = R_1.$$

Also ist:

$$a_1 = R_1.$$

Diese Formeln für a_ν beziehen sich auf ein ungerades N. Die höheren Konstanten werden in ähnlicher Weise berechnet. Für gerades N ist:

$$a_0 = \frac{\sum x\,w}{N} = \frac{S_0}{N};$$

[1] Vgl. Seite 11.

$$a_1 = \frac{\sum x\, w\, X_1}{N}; \qquad X_1(x) = \frac{\frac{x}{2}}{\left(\frac{N+1}{2}\right)^{(2)}} \sqrt{\frac{3\,\frac{N}{2}\left(\frac{N+1}{2}\right)^{(2)}}{\frac{N}{2}}};$$

$$X_1(x) = x\sqrt{\frac{3}{N^2-1}}; \qquad a_1 = \frac{1}{N}\sqrt{\frac{3}{N^2-1}}\,\sum x\, w\, x;$$

$$a_1 = \frac{1}{N}\sqrt{\frac{3}{N^2-1}}\,2\,S_1 - S_0;$$

$$a_1 = \frac{1000}{N}\sqrt{\frac{3}{N^2-1}}\cdot\frac{2\,S_1 - S_0}{1000}; \qquad \sqrt{\frac{3}{N^2-1}}\cdot\frac{1000}{N} = k_1.$$

Also ist:

$$a_1 = k_1 \cdot \frac{2\,S_1 - S_0}{1000} = R_1.$$

Auf analoge Weise werden a_2, a_3, ... bestimmt und ähnliche, aus den Hilfszahlen k_0, k_1, k_2 ...., R_0, R_1, R_2 .... zusammengesetzte Ausdrücke für die Koeffizienten a_r erhalten. Die Hilfszahlen sind für alle Werte von N berechnet und tabuliert[1].

Berechnung der Trendkonstanten (Logarithmen)
Reichsversicherungsanstalt $N = 44$.

x	y	$10^5 i_y$	$\log 10^5 i_y$	$S_0 = s_0 + s_{-0}$	$S_1 = s_1 - s_{-1}$	$S_2 = s_2 + s_{-2}$	$S_3 = s_3 - s_{-3}$
− 43	20½	151	2,1790	2,1790	2,1790	2,1790	2,1790
− 41	21½	111	2,0453	4,2243	6,4033	8,5823	10,7613
− 39	22½	81	1,9085	6,1328	12,5361	21,1184	31,8797
− 37	23½	115	2,0607	6,1935	20,7296	41,8480	73,7277
− 35	24½	95	1,9777	10,1712	30,9008	72,7488	146,4765
− 33	25½	103	2,0128	12,1840	43,0848	115,8336	262,3101
− 31	26½	89	1,9494	14,1334	57,2182	173,0518	435,3619
− 29	27½	164	2,2148	16,3482	73,5664	246,8182	681,9801
− 27	28½	120	2,0792	18,4274	91,9938	338,6120	1020,5921
− 25	29½	119	2,0756	20,5030	112,4968	451,1088	1471,7009
− 23	30½	121	2,0828	22,5858	135,0826	586,1914	2057,8923
− 21	31½	127	2,1038	24,6896	159,7722	745,9636	2803,8559
− 19	32½	142	2,1523	26,8419	186,6141	932,5777	3736,4336
− 17	33½	157	2,1987	29,0406	215,6547	1148,2324	4884,6660
− 15	34½	178	2,2504	31,2910	246,9457	1395,1781	6279,8441
− 13	35½	210	2,3222	33,6132	280,5589	1675,7370	7955,5811
− 11	36½	213	2,3284	35,9416	316,5005	1992,2375	9947,8180
− 9	37½	242	2,3838	38,3254	354,8259	2374,0634	12294,8820
− 7	38½	284	2,4533	40,7787	395,6046	2742,6680	15037,5500
− 5	39½	313	2,4955	43,2742	438,8788	3181,5468	18219,0968
− 3	40½	354	2,5490	45,8232	484,7020	3666,2488	—
− 1	41½	361	2,5575	48,3807	—	—	—

[1] Lorenz: Der Trend, vgl. Anmerkung 1, Seite 8, und Lorenz: Der Trend, Vierteljahrshefte zur Konjunkturforschung, Sonderheft 9, Berlin 1928.

Fortsetzung der Berechnung der Trendkonstanten.

x	y	$10^5 i_y$	$\log 10^5 i_y$	$S_0 = s_0 + s_{-0}$	$S_1 = s_1 - s_{-1}$	$S_2 - s_2 + s_{-2}$	$S_3 = s_3 - s_{-3}$
+ 1	$42^1/_2$	377	2,5763	71,2388	884,3567	—	—
+ 3	$43^1/_2$	394	2,5955	68,6625	813,1179	6464,5378	39622,8305
+ 5	$44^1/_2$	442	2,6454	66,0670	744,4554	5651,4199	33158,2927
+ 7	$45^1/_2$	508	2,7059	63,4216	678,3884	4906,9645	27506,8728
+ 9	$46^1/_2$	577	2,7612	60,7157	614,9668	4228,5761	22599,9083
+ 11	$47^1/_2$	618	2,7910	57,9545	554,2511	3613,6093	18371,3322
+ 13	$48^1/_2$	726	2,8609	55,1635	496,2966	3059,3582	14757,7229
+ 15	$49^1/_2$	868	2,9385	52,3026	441,1331	2563,0616	11698,3647
+ 17	$50^1/_2$	973	2,9881	49,3641	388,8305	2121,8285	9135,3031
+ 19	$51^1/_2$	1225	3,0881	46,3760	339,4664	1733,0980	7013,3746
+ 21	$52^1/_2$	1376	3,1386	43,2879	293,0904	1393,6316	5280,2766
+ 23	$53^1/_2$	1723	3,2363	40,1493	249,8025	1100,5412	3886,6450
+ 25	$54^1/_2$	2032	3,3079	36,9130	209,6532	850,7387	2786,1038
+ 27	$55^1/_2$	2503	3,3985	33,6051	172,7402	641,0855	1935,3651
+ 29	$56^1/_2$	3038	3,4826	30,2066	139,1351	468,3453	1294,2796
+ 31	$57^1/_2$	3588	3,5549	26,7240	108,9285	329,2102	825,9343
+ 33	$58^1/_2$	4293	3,6328	23,1691	82,2045	220,2817	496,7241
+ 35	$59^1/_2$	5662	3,7530	19,5363	59,0354	198,0772	276,4424
+ 37	$60^1/_2$	8721	3,9406	15,7833	39,4991	79,0418	138,3652
+ 39	$61^1/_2$	8383	3,9234	11,8427	23,7158	39,5427	59,3234
+ 41	$62^1/_2$	9237	3,7655	7,9193	11,8731	15,8269	19,7807
+ 43	$63^1/_2$	8990	3,9538	3,9538	3,9538	3,9538	3,9538

Es ist:

$$a_0 = \frac{S_0}{N} = \frac{119 \cdot 6195}{44} = \mathbf{2{,}718625},$$

wobei:

$$S_0 = s_0 + s_{-0}; \quad \begin{aligned} s_0 &= 71{,}2388 \\ s_{-0} &= 48{,}3807 \\ \hline S_0 &= 119{,}6195. \end{aligned}$$

$$a_1 = R_1; \qquad R_1 = \frac{2\,S_1 - S_0}{1000} \cdot k_1.$$

Es ist:

$$S_1 = s_1 - s_{-1}; \qquad \begin{aligned} s_1 &= 884{,}3567 \\ -s_{-1} &= 484{,}7020 \\ \hline S_1 &= 399{,}6547 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\,S_1 &= 799{,}3094 \\ -S_0 &= 119{,}6195 \\ \hline & 679{,}6899. \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{a_1 = R_1 = 0{,}608244}.$$

$$a_2 = R_2 - R_0 \cdot R_2 = \frac{S_2}{1000} \cdot K_2 = \frac{s_2 + s_{-2}}{1000} \cdot k_2 .$$

$$\begin{aligned} R_2 &= 3{,}195310 \\ -R_0 &= 3{,}037166 \\ \hline & 0{,}158144. \end{aligned}$$

$$R_0 = \frac{S_0}{N} \cdot k_0 .$$

$$\boldsymbol{a_2 = 0{,}158144.}$$

$$a_3 = (R_3 - R_1) \cdot l_3 ; \qquad R_3 = \frac{2\,S_3 - S_2}{1000} \cdot k_3 .$$

$$S_3 = s_3 - s_{-3} .$$

$$\boldsymbol{a_3 = -0{,}006469 .}$$

Die erforderlichen Hilfszahlen k_0, k_1, k_2, k_3 sowie l_3 sind aus der Tabelle entnommen worden.

Die Gleichungen für ein Näherungspolynom 3. Grades heißt also:

$$\log 10^5 i_y = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3$$

$$\log 10^5 i_y = 2{,}718625 + 0{,}608244\, X_1 + 0{,}158144\, X_2 - 0{,}006469\, X_3 .$$

wobei die Konstanten a_ν die soeben nach dem Tschetwerikoffschen Schema berechneten Werte annehmen. Würde man sich mit einem Näherungspolynom 2. Grades zufrieden geben, so würde die Gleichung heißen:

$$\log 10^5 i_y = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2$$

$$\log 10^5 i_y = 2{,}718625 + 0{,}608244\, X_1 + 0{,}158144\, X_2 .$$

Auswertung der Trendgleichungen (Logarithmen).
Reichsversicherungsanstalt.

Alter y / x	$20^1/_2$ − 43	$21^1/_2$ − 41	$22^1/_2$ − 39	$23^1/_2$ − 37	$24^1/_2$ − 35	$25^1/_2$ − 33
a_0	2,71863	2,71863	2,71863	2,71863	2,71863	2,71863
$a_1 X_1$	−1,02983	−0,98193	−0,93403	−0,88613	−0,83823	−0,79033
$z_1 = a_0 + a_1 X_1$	1,68880	1,73670	1,78460	1,83250	1,88040	1,92830
$a_2 X_2$	0,33030	0,28421	0,24032	0,19862	0,15912	0,12181
$z_2 = z_1 + a_2 X_2$	2,01910	2,02091	2,02492	2,03112	2,03952	2,05011
$a_3 X_3$	0,01496	0,01078	0,00711	0,00390	0,00115	−0,00119
$z_3 = z_2 + a_3 X_3$	2,03406	2,03169	2,03203	2,03502	2,04067	2,04892
$a_4 X_4$	0,02227	0,01191	0,00377	−0,00240	−0,00684	−0,00979
$z_4 = z_3 + a_4 X_4$	2,05633	2,04360	2,03580	2,03262	2,03383	2,03913

Alter y x	$26^1/_2$ -31	$27^1/_2$ -29	$28^1/_2$ -27	$29^1/_2$ -25	$30^1/_2$ -23	$31^1/_2$ -21
a_0	2,71863	2,71863	2,71863	2,71863	2,71863	2,71863
$a_1 X_1$	−0,74243	−0,69454	−0,64664	−0,59874	−0,55084	−0,50294
$z_1 = a_0 + a_1 X_1$	1,97620	2,02409	2,07190	2,11989	2,16779	2,21569
$a_2 X_2$	0,08669	0,05377	0,02305	−0,00549	−0,03182	−0,05597
$z_2 = z_1 + a_2 X_2$	2,06289	2,07786	2,09504	2,11440	2,13597	2,15972
$a_3 X_3$	−0,00312	−0,00467	−0,00588	−0,00676	−0,00733	−0,00763
$z_3 = z_2 + a_3 X_3$	2,05977	2,07319	2,08916	2,10764	2,12864	2,15209
$a_4 X_4$	−0,01145	−0,01202	−0,01171	−0,01068	−0,00909	−0,00711
$z_4 = z_3 + a_4 X_4$	2,04832	2,06117	2,07745	2,09696	2,11955	2,14498

Alter y x	$32^1/_2$ -19	$33^1/_2$ -17	$34^1/_2$ -15	$35^1/_2$ -13	$36^1/_2$ -11	$37^1/_2$ -9
a_0	2,71863	2,71863	2,71863	2,71863	2,71863	2,71863
$a_1 X_1$	−0,45504	−0,40714	−0,35924	−0,31134	−0,26344	−0,21554
$z_1 = a_0 + a_1 X_1$	2,26359	2,31149	2,35939	2,40729	2,45519	2,50309
$a_2 X_2$	−0,07791	−0,09766	−0,11525	−0,13058	−0,14375	−0,15473
$z_2 = z_1 + a_2 X_2$	2,18568	2,21383	2,24417	2,27671	2,31144	2,34836
$a_3 X_3$	−0,00767	−0,00748	−0,00708	−0,00651	−0,00577	−0,00490
$z_3 = z_2 + a_3 X_3$	2,17801	2,20635	2,23709	2,27020	2,30567	2,34346
$a_4 X_4$	−0,00486	−0,00003	0,00008	0,00225	0,00440	0,00632
$z_4 = z_3 + a_4 X_4$	2,17315	2,20632	2,23701	2,27245	2,31007	2,34978

Alter y x	$38^1/_2$ -7	$39^1/_2$ -5	$40^1/_2$ -3	$41^1/_2$ -1	$42^1/_2$ 1	$43^1/_2$ 3
a_0	2,71863	2,71863	2,71863	2,71863	2,71863	2,71863
$a_1 X_1$	−0,16764	−0,11974	−0,07185	−0,02395	0,02395	0,07185
$z_1 = a_0 + a_1 X_1$	2,55099	2,59889	2,64678	2,69468	2,74258	2,79048
$a_2 X_2$	−0,16351	−0,17009	−0,17448	−0,17667	−0,17667	−0,17448
$z_2 = z_1 + a_2 X_2$	2,38748	2,42880	2,47230	2,51801	2,56591	2,61600
$a_3 X_3$	−0,00393	−0,00287	−0,00174	−0,00059	0,00059	0,00174
$z_3 = z_2 + a_3 X_3$	2,38355	2,42593	2,47056	2,51742	2,56650	2,61774
$a_4 X_4$	0,00792	0,00917	0,01003	0,01046	0,01046	0,01003
$z_4 = z_3 + a_4 X_4$	2,39147	2,43510	2,48059	2,52788	2,57696	2,62777

Alter y / x	$44^1/_2$ / 5	$45^1/_2$ / 7	$46^1/_2$ / 9	$47^1/_2$ / 11	$48^1/_2$ / 13	$49^1/_2$ / 15
a_0	2,71863	2,71863	2,71863	2,71863	2,71863	2,71863
$a_1 X_1$	0,11975	0,16764	0,21554	0,26344	0,31134	0,35924
$z_1 = a_0 + a_1 X_1$	2,83838	2,88627	2,93417	2,98207	3,02997	3,07787
$a_2 X_2$	−0,17009	−0,16351	−0,15473	−0,14375	−0,13058	−0,11522
$z_2 = z_1 + a_2 X_2$	2,66829	2,72276	2,77944	2,83832	2,89939	2,96265
$a_3 X_3$	0,00287	0,00393	0,00490	0,00577	0,00651	0,00708
$z_3 = z_2 + a_3 X_3$	2,67116	2,72669	2,78434	2,84409	2,90590	2,96973
$a_4 X_4$	0,00917	0,00792	0,00632	0,00440	0,00225	−0,00008
$z_4 = z_3 + a_4 X_4$	2,68033	2,73461	2,79066	2,84849	2,90815	2,96965

Alter y / x	$50^1/_2$ / 17	$51^1/_2$ / 19	$52^1/_2$ / 21	$53^1/_2$ / 23	$54^1/_2$ / 25	$55^1/_2$ / 27	$56^1/_2$ / 29
a_0	2,71863	2,71863	2,71863	2,71863	2,71863	2,71863	2,71863
$a_1 X_1$	0,40714	0,45504	0,50294	0,55084	0,59874	0,64664	0,69454
$z_1 = a_0 + a_1 X_1$	3,12577	3,17367	3,22157	3,26947	3,31737	3,36527	3,41317
$a_2 X_2$	−0,09766	−0,07791	−0,05597	−0,03182	−0,00549	−0,00230	0,05377
$z_2 = z_1 + a_2 X_2$	3,02811	3,09576	3,16560	3,23765	3,31188	3,36757	3,46694
$a_3 X_3$	0,00748	0,00767	0,00763	0,00733	0,00676	0,00588	0,00467
$z_3 = z_2 + a_3 X_3$	3,03559	3,10343	3,17323	3,24498	3,31864	3,37345	3,47161
$a_4 X_4$	−0,00003	−0,00486	−0,00711	−0,00909	−0,01068	−0,01171	−0,01202
$z_4 = z_3 + a_4 X_4$	3,03556	3,09857	3,16612	3,23589	3,30796	3,36174	3,45959

Alter y / x	$57^1/_2$ / 31	$58^1/_2$ / 33	$59^1/_2$ / 35	$60^1/_2$ / 37	$61^1/_2$ / 39	$62^1/_2$ / 41	$63^1/_2$ / 43
a_0	2,71863	2,71863	2,71863	2,71863	2,71863	2,71863	2,71863
$a_1 X_1$	0,74244	0,79033	0,83823	0,88613	0,93403	0,98193	1,02983
$z_1 = a_0 + a_1 X_1$	3,46107	3,50896	3,55686	3,60476	3,65266	3,70056	3,74846
$a_2 X_2$	0,08669	0,12181	0,15912	0,19862	0,24032	0,28421	0,33030
$z_2 = z_1 + a_2 X_2$	3,54776	3,63077	3,71598	3,80338	3,89298	3,98421	4,07876
$a_3 X_3$	0,00312	0,00119	−0,00115	−0,00390	−0,00711	−0,01078	−0,01496
$z_3 = z_2 + a_3 X_3$	3,55088	3,63196	3,71483	3,79948	3,88587	3,97399	4,06380
$a_4 X_4$	−0,01145	−0,00979	−0,00684	−0,00240	0,00377	0,01191	0,02227
$z_4 = z_3 + a_4 X_4$	3,53943	3,62217	3,70799	3,79708	3,88964	3,98590	4,08607

Für die Tafel von Ottaviani[1] ergibt sich für die Logarithmen der Näherungspolynome folgendes Bild:

[1] Vgl. Anmerkung 2, Seite 10.

Ausgleichung der Invaliditätswahrscheinlichkeiten.
Ottaviani.

Logarithmische Werte		Anzahl der Beobachtungen: $N = 47$		
Alter y	$\log 10^5 i_y$	Trend 1. Grades	Trend 2. Grades	Trend 3. Grades
19	1,9191	1,6070	1,9813	2,1672
20	2,2480	1,6555	1,9784	2,1158
21	2,0128	1,7010	1,9776	2,0719
22	2,1987	1,7465	1,9790	2,0353
23	2,1303	1,7920	1,9826	2,0058
24	2,0828	1,8375	1,9882	1,9831
25	2,0899	1,8831	1,9961	1,9669
26	1,9685	1,9286	2,0061	1,9571
27	1,7782	1,9741	2,0182	1,9535
28	2,0253	2,0196	2,0325	1,9554
29	1,7243	2,0651	2,0490	1,9630
30	1,8513	2,1106	2,0676	1,9760
31	1,9138	2,1561	2,0883	1,9940
32	2,0414	2,2016	2,1112	2,0169
33	2,1072	2,2471	2,1363	2,0444
34	1,8573	2,2926	2,1635	2,0763
35	2,2253	2,3382	2,1928	2,1123
36	2,2380	2,3837	2,2244	2,1521
37	2,3979	2,4292	2,2480	2,1856
38	2,1430	2,4747	2,2939	2,2424
39	2,3385	2,5202	2,3418	2,3024
40	2,3747	2,5657	2,3720	2,3453
41	2,3636	2,6112	2,4142	2,4008
42	2,4997	2,6567	2,4587	2,4587
43	2,4955	2,7022	2,5053	2,5187
44	2,6160	2,7477	2,5540	2,5807
45	2,6551	2,7933	2,6049	2,6443
46	2,7007	2,8388	2,6579	2,7094
47	2,7701	2,8843	2,7131	2,7756
48	2,7896	2,9298	2,7703	2,8427
49	2,9248	2,9753	2,8300	2,9105
50	2,9809	3,0208	2,8916	2,9788
51	3,0477	3,0663	2,9554	3,0473
52	3,0795	3,1118	3,0214	3,1157
53	3,2212	3,1573	3,0895	3,1838
54	3,2428	3,2028	3,1598	3,2514
55	3,3193	3,2484	3,2322	3,3182
56	3,3535	3,2939	3,3068	3,3839
57	3,4116	3,3394	3,3835	3,4484
58	3,5255	3,3849	3,4624	3,5114
59	3,5471	3,4304	3,5434	3,5725
60	3,7035	3,4759	3,6266	3,6217
61	3,6908	3,5214	3,7119	3,6887
62	3,7551	3,5669	3,7994	3,7431
63	3,7769	3,6124	3,8881	3,7938
64	3,8468	3,6579	3,9809	3,8435
65	3,8824	3,7035	4,0747	2,8889

Numeri der Trendwerte		Anzahl der Beobachtungen: $N = 47$		
Alter y	$10^2 i_y$	Trend 1. Grades	Trend 2. Grades	Trend 3. Grades
19	0,083	0,040	0,096	0,147
20	0,177	0,045	0,095	0,131
21	0,103	0,050	0,095	0,118
22	0,158	0,056	0,095	0,108
23	0,135	0,062	0,096	0,101
24	0,121	0,069	0,097	0,096
25	0,123	0,076	0,099	0,093
26	0,093	0,085	0,101	0,091
27	0,060	0,094	0,104	0,090
28	0,106	0,105	0,107	0,090
29	0,053	0,116	0,112	0,092
30	0,071	0,129	0,117	0,095
31	0,082	0,143	0,123	0,099
32	0,110	0,159	0,129	0,104
33	0,128	0,177	0,137	0,111
34	0,072	0,196	0,146	0,119
35	0,168	0,218	0,156	0,130
36	0,179	0 244	0,168	0,142
37	0,250	0,269	0,177	0,153
38	0,139	0,298	0,197	0,175
39	0,218	0,331	0,220	0,201
40	0,237	0,368	0,235	0,221
41	0.231	0,409	0,260	0,252
42	0,316	0,454	0,288	0,288
43	0,313	0,505	0,320	0,330
44	0,413	0,559	0,358	0,381
45	0,452	0,621	0,403	0,441
46	0,502	0,689	0,455	0,512
47	0,589	0,766	0,516	0,596
48	0,616	0,851	0,590	0,696
49	0,841	0,945	0,676	0,814
50	0,957	1,049	0,779	0,952
51	1,116	1,165	0,902	1,115
52	1,201	1,293	1,051	1,305
53	1,664	1,436	1,229	1,527
54	1,749	1,595	1,445	1,784
55	2.086	1,772	1,707	2,080
56	2,257	1,967	2,027	2,421
57	2,580	2,185	2,418	2,808
58	3,354	2,426	2,900	3,246
59	3,525	2,694	3,495	3,737
60	5,052	2,992	4,232	4,283
61	4,907	3,223	5,151	4,883
62	5,690	3,689	6,301	5,534
63	5,983	4,096	7,728	6,220
64	7,028	4,549	9,569	6,974
65	7,628	5,052	11,877	7,742

Ausgleichung der Invaliditätswahrscheinlichkeiten.
Reichsversicherungsanstalt.

Numeri der Trendwerte		Anzahl der Beobachtungen: $N = 44$			
Alter y	$10^2 i_y$	Trend 1. Grades	Trend 2. Grades	Trend 3. Grades	Trend 4. Grades
20	0,151	0,049	0,104	0,108	0,114
21	0,111	0,055	0,105	0,108	0,111
22	0,081	0,061	0,106	0,108	0,109
23	0,115	0,068	0,107	0,108	0,108
24	0,095	0,076	0,110	0,110	0,108
25	0,109	0,085	0,112	0,112	0,109
26	0,089	0,095	0,116	0,115	0,112
27	0,164	0,106	0,120	0,118	0,115
28	0,120	0,118	0,124	0,123	0,120
29	0,119	0,129	0,130	0,128	0,125
30	0,121	0,147	0,137	0,134	0,132
31	0,127	0,164	0,144	0,142	0,140
32	0,142	0,183	0,153	0,151	0,149
33	0,158	0,205	0,164	0,161	0,161
34	0,178	0,229	0,175	0,173	0·173
35	0,210	0,255	0,189	0,186	0,187
36	0,213	0,285	0,205	0,202	0,204
37	0,242	0,318	0,223	0,221	0,224
38	0,284	0,356	0,244	0,242	0,246
39	0,313	0,397	0,268	0,267	0,272
40	0,354	0,443	0,297	0,296	0,302
41	0,361	0,459	0,330	0,329	0,337
42	0,377	0,553	0,368	0,369	0,378
43	0,394	0,617	0,413	0,415	0,424
44	0,442	0,689	0,466	0,469	0,479
45	0,508	0,770	0,528	0,533	0,543
46	0,577	0,859	0,601	0,609	0,618
47	0,618	0,960	0,689	0,698	0,705
48	0,726	1,071	0,793	0,805	0,809
49	0,868	1,196	0,918	0,933	0,933
50	0,973	1,336	1,067	1,085	1,085
51	1,225	1,492	1,247	1,268	1,255
52	1,376	1,666	1,464	1,490	1,466
53	1,723	1,860	1,728	1,758	1,721
54	2,032	2,077	2,051	2,083	2,032
55	2,503	2,319	2,331	2,363	2,300
56	3,038	2,589	2,930	2,962	2,881
57	3,588	2,891	3,530	3,555	3,463
58	4,293	3,228	4,273	4,285	4,190
59	5,662	3,604	5,200	5,186	5,105
60	8,721	4,025	6,359	6,302	6,267
61	8,383	4,494	7,816	7,689	7,756
62	9.237	5,018	9,655	9,419	9,680
63	8,990	5,604	11,988	11,582	12,192

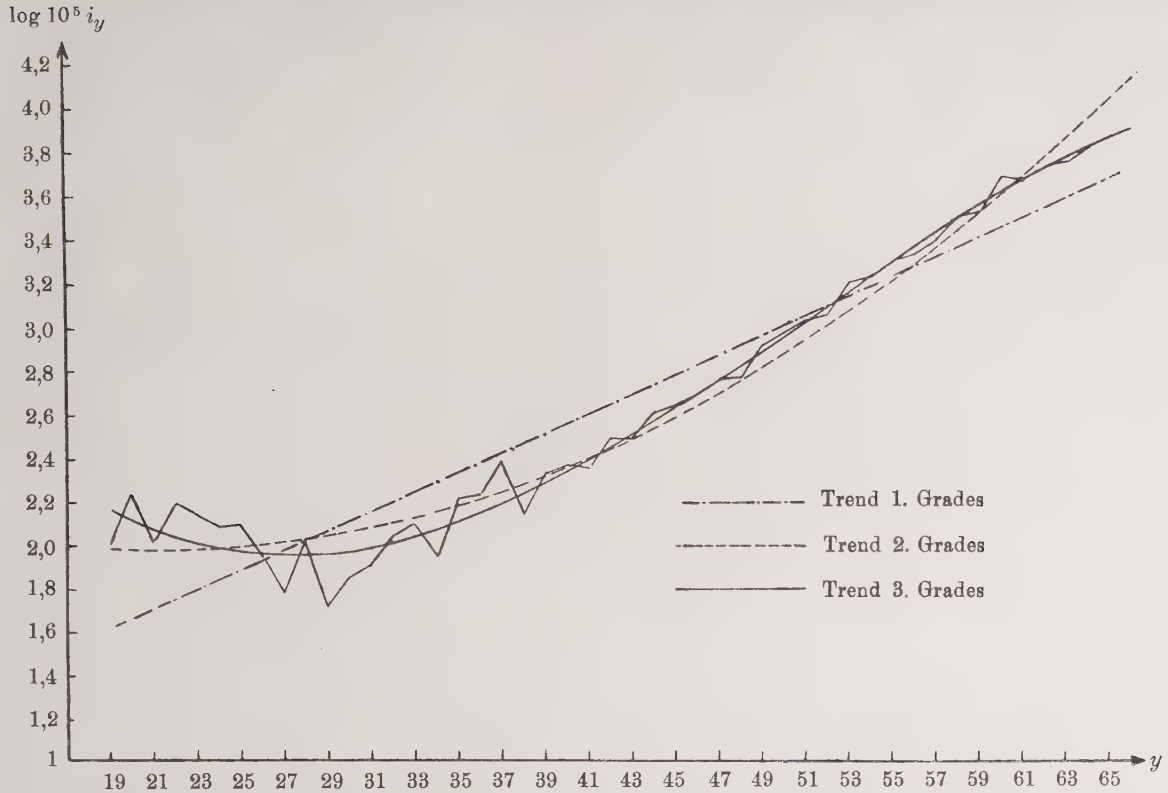

Abb. 1. Trendwerte (Logarithmen). Ottaviani.

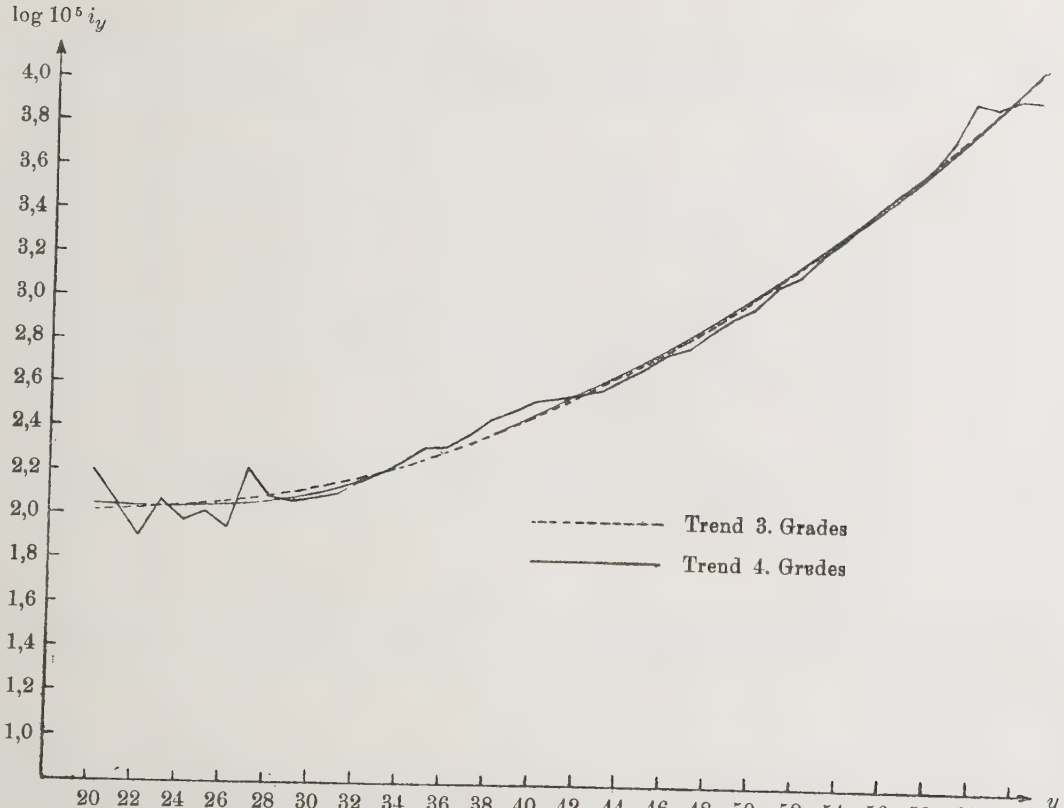

Abb. 2. Trendwerte (Logarithmen). Reichsversicherungsanstalt.

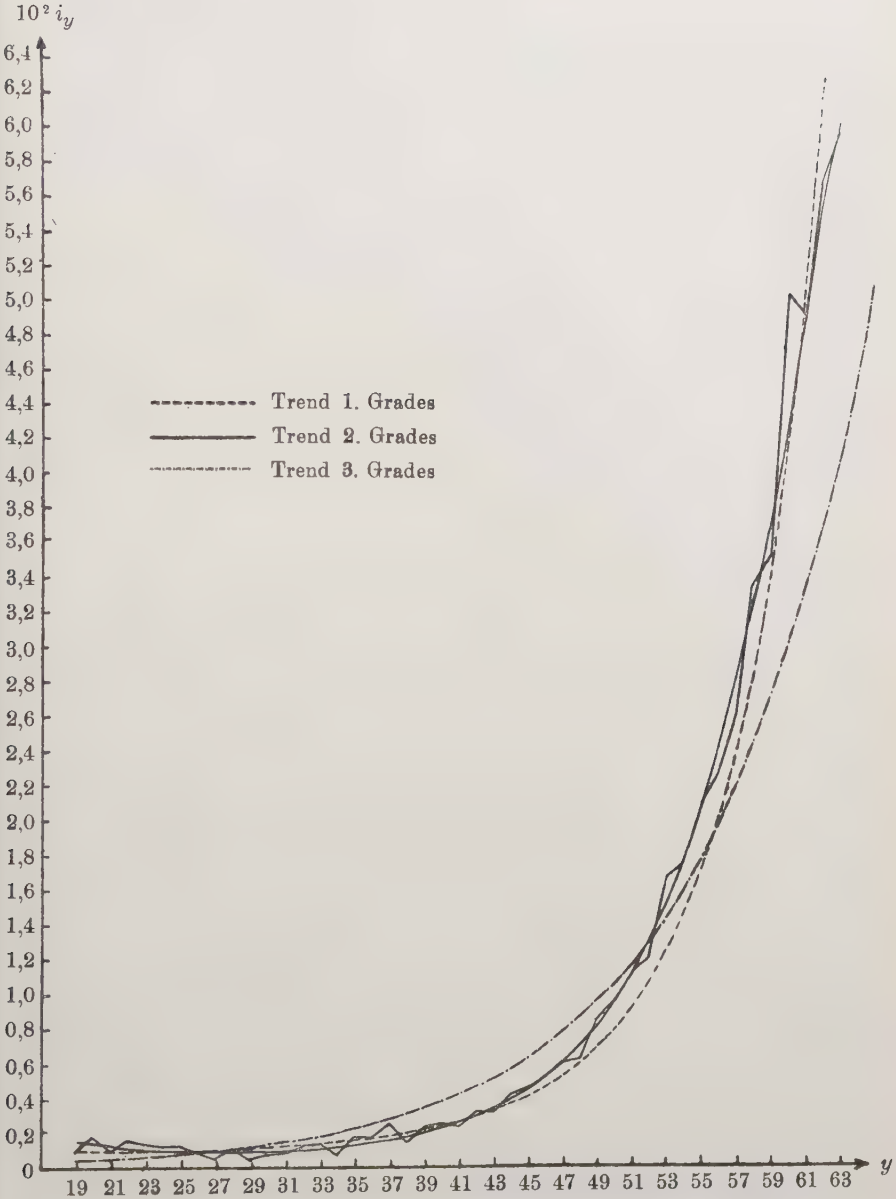

Abb. 3. Trendwerte. Ottaviani.

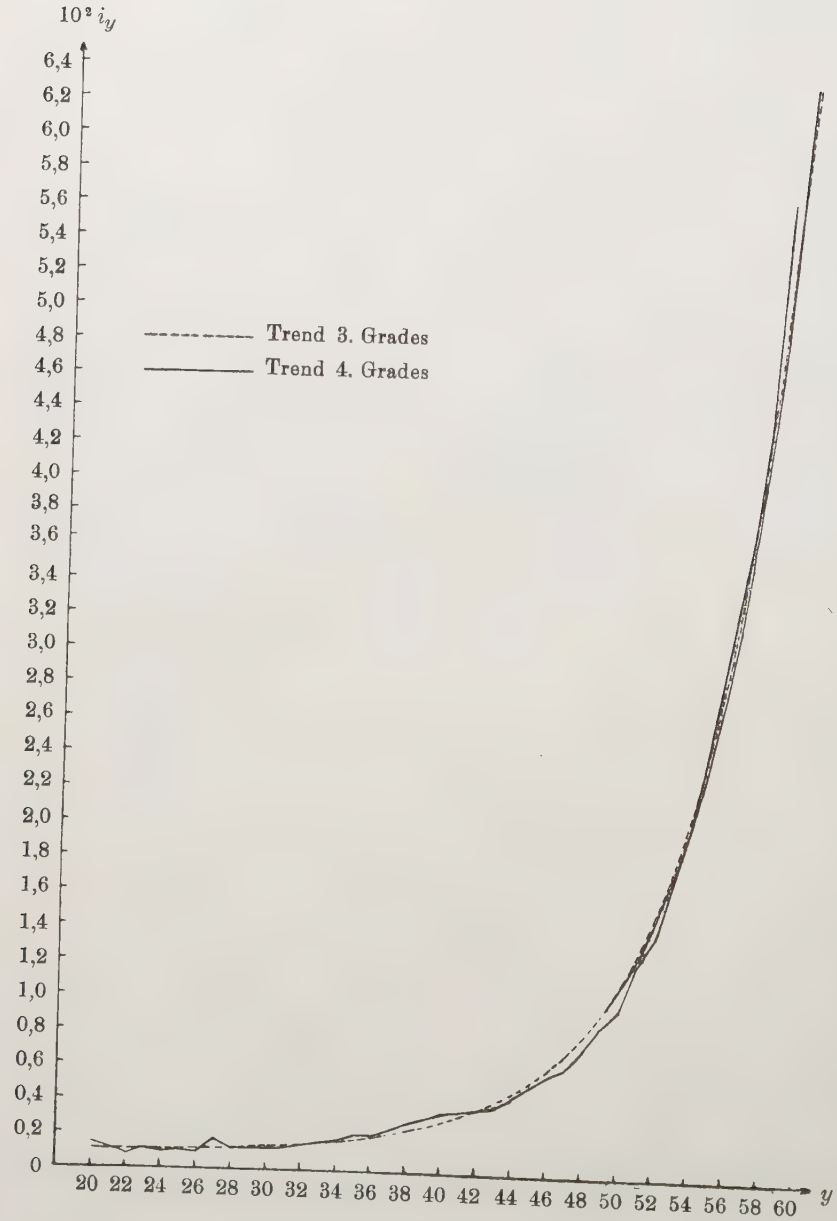

Abb. 4. Trendwerte. Reichsversicherungsanstalt.

Es ist noch darauf hinzuweisen, daß bei dieser Methode der Ausgleichung der Invaliditätswahrscheinlichkeiten i_y für jedes Alter y sämtliche Beobachtungswerte benutzt werden. Betrachtet man z. B. die Invaliditätswahrscheinlichkeiten der Tafel der Reichsversicherungsanstalt, so sieht man, daß die Invaliditätswahrscheinlichkeiten vom Alter $y = 20^1/_2$ bis zum Alter $y = 63^1/_2$ benutzt wurden. Die Anzahl der den Altern y zugeordneten Beobachtungswerte ist $N = 44$. Aus der nebenstehenden Tabelle ist folgendes ersichtlich:

y	i_y	Argument x
20	i_{20}	−43
21	i_{21}	−41
22	i_{22}	−39
⋮	⋮	⋮
41	i_{41}	−1
42	i_{42}	1
43	i_{43}	3
⋮	⋮	⋮
61	i_{61}	39
62	i_{62}	41
63	i_{63}	43

Jedem Alter y und jeder Invaliditätswahrscheinlichkeit i_y ist ein bestimmtes Argument x der ganzen rationalen orthogonalen Funktion X_i zugeordnet. Summiert wird gemäß der Definition der Funktion über alle x, zu welchen Beobachtungen gehören. Infolge dieser Bestimmung der Funktionen X_i wird daher über alle Invaliditätswahrscheinlichkeiten i_y summiert. Also gehen bei der Ausgleichung eines jeden Beobachtungswertes sämtliche anderen Beobachtungswerte mit in die Ausgleichung ein.

C. Anwendung der χ^2-Methode auf die Ausgleichung von Invaliditätstafeln.

1. Vorbereitungen zur Anwendung der χ^2-Methode.

Soll die χ^2-Methode auf die Ausgleichung von Invaliditätswahrscheinlichkeiten angewendet werden, so müssen die verschiedenen Alter $y_1, y_2, y_3 \ldots y_k$ als die k Merkmale einer arithmetischen Verteilung betrachtet werden. Zu den Altern y gehören die entsprechenden Zahlen der Invaliden J_y.

Als Ausscheidegrund aus der geschlossenen Aktivengesamtheit l_y^{aa} gilt in diesem Falle nur die Invalidität. Um den Einfluß anderer möglicher Ausscheideursachen unwirksam zu machen, wurde mit den Karupschen unabhängigen Wahrscheinlichkeiten gerechnet[1]. Die

[1] Karup, J.: Die Finanzlage der Gothaischen Staatsdienerwitwensozietät am 31. Dezember 1890, Dresden 1893.

unabhängigen Invaliditätswahrscheinlichkeiten werden mit $\bar{i}_y$ bzw. $\bar{i}_y^*$ bezeichnet. Die Anzahl der Invaliden sei $\bar{J}_y$ und $\bar{J}_y^*$.

Die unabhängigen unausgeglichenen und die unabhängigen ausgeglichenen Invaliditätswahrscheinlichkeiten $\bar{i}_y$ bzw. $\bar{i}_y^*$ wurden nach folgenden Formeln bestimmt:

I. $$ {}_3\bar{i}_y = \frac{i_y(2 - i_y)}{2 - q_y^{aa} - \bar{i}_y}; \qquad {}_3\bar{i}_y^* = \frac{i_y^*(2 - i_y^*)}{2 - q_y^{aa*} - \bar{i}_y^*}. $$

Der Index 3 gibt an, daß der dritte Näherungsbruch der Böhmerschen Kettenbruchentwicklung der unabhängigen Invaliditätswahrscheinlichkeiten noch berücksichtigt wurde[1]. Mit Hilfe dieser Wahrscheinlichkeiten können die Zahlen der Invaliden $\bar{J}_y$ bzw. $\bar{J}_y^*$ ermittelt werden. Es ergeben sich die Formeln:

II. $$ \bar{J}_y = \bar{i}_y \cdot l_y^{aa}; \qquad \bar{J}_y^* = \bar{i}_y^* \cdot l_y^{aa*}. $$

Zuerst wurde mit Hilfe der Formeln I aus den beobachteten Wahrscheinlichkeiten i_y und q_y^{aa} die unabhängigen Invaliditätswahrscheinlichkeiten $\bar{i}_y$ festgestellt. Dann wurde mit Hilfe der unausgeglichenen abhängigen Invaliditätswahrscheinlichkeit i_y und der abhängigen unausgeglichenen Sterbenswahrscheinlichkeit q_y^{aa} eine Aktivenausscheidetafel der l_y^{aa} hergestellt. Mittels der ausgeglichenen Invaliditätswahrscheinlichkeit i_y^* und der ausgeglichenen Sterbenswahrscheinlichkeit q_y^{aa*} wurde eine Aktivenausscheidetafel der l_y^{aa*} berechnet. Dabei wurde jedesmal von einem Bestand von 100000 Aktiven des Alters y ausgegangen. Daraus ergaben sich durch Anwendung der Formeln II die $\bar{J}_y$ und $\bar{J}_y^*$.

Um die beiden Gesamtheiten miteinander vergleichbar zu machen, muß ihr Umfang einander entsprechen. Also:

$$ \sum_{y=20}^{63} \bar{J}_y = 100000 \qquad \text{bzw.} \qquad \sum_{y=20}^{63} \bar{J}_y^* = 100000. $$

Um dies zu erreichen, muß die zu jedem Alter y gehörige Anzahl $\bar{J}_y$ mit einem Faktor λ so multipliziert werden, daß

$$ \lambda \sum_{y=20}^{63} \bar{J}_y = 100000 = l_y^{aa} $$

ist. Hieraus ergibt sich:

$$ \lambda = \frac{100000}{\sum_{y=20}^{63} \bar{J}_y} = \frac{100000}{40507 \cdot 3} = 2{,}298. $$

[1] Böhmer, P. E.: Die Grundlagen der Theorie der Invaliditätsversicherung, Jahrbuch für Versicherungsmathematik von E. Rose und W. Katz, Berlin 1914.

In entsprechender Weise wird λ^* als Faktor für die ausgeglichenen Zahlen der J_y^* berechnet. Es ist:

$$\lambda^* = \frac{100\,000}{\sum_{y=20}^{63} J_y^*} = \frac{100\,000}{43\,237 \cdot 4} = 2{,}313.$$

2. Die Anwendung der χ^2-Methode.

Im folgenden soll die χ^2-Methode als Prüffunktion auf den exponentiellen Trend 3. und 4. Grades des auf Seite 16 ff. gerechneten Beispiels angewandt werden. Für den Trend 3. Grades gelten die obigen Zahlen $\lambda = 2{,}298$ und $\lambda^* = 2{,}313$. Für den Trend 4. Grades ist $\lambda = 2{,}298$ und $\lambda^* = 2{,}301$.

Die Prüffunktion χ^2 wurde in folgender Form angesetzt:

$$\chi^2 = \sum_{y=20}^{63} \frac{(\lambda \bar{J}_y - \lambda^* \bar{J}_y^*)^2}{\lambda^* J_y^*}.$$

Hierbei muß beachtet werden, daß bei der Berechnung von χ^2 infolge des Näherungscharakters von χ^2 gewisse Vorsichtsmaßregeln getroffen werden müssen, worauf Greiner[1] und Ibsch[2] in ihren Arbeiten besonders hingewiesen haben. Greiner schreibt, daß die Formel für χ^2 nur für den mittleren Teil der Intervalle gilt, und daß die Verhältnisse an den Enden der statistischen Reihe dadurch nicht berührt werden. Sollen diese auch mit in die Formel einbezogen werden, müssen so viele Endintervalle zusammengefaßt werden, daß sich die daraus ergebende Häufigkeit in der Größenordnung der Häufigkeiten der mittleren Intervalle bewegt. Aus diesem Grunde wurden in dem Beispiel die Anfangsalter $y = 20$ bis 27 der statistischen Reihe zu einer Gruppe zusammengefaßt. Die mittleren Alter blieben von der Zusammenfassung unberührt. Vom Alter 38 bis zum Alter 46 wurde eine Gruppe gebildet. Anschließend wurden die Endalter von $y = 47$ bis 63 zusammengenommen.

Beispiel: Berechnung von χ^2 für den exponentiellen Trend 3. und 4. Grades der Invaliditätswahrscheinlichkeiten der Reichsversicherungsanstalt.

---

[1] Greiner: Über das Fehlersystem der Kollektivmaßlehre, Zeitschrift für Mathematik und Physik, 57. Band, S. 121—158, 225—260, 337—373.

[2] Ibsch: Ein Beitrag zu Untersuchungen über die Anpassungsgüte von Häufigkeitsverteilungen, Hamburg 1932.

Berechnung von χ^2. Trend 3. Grades.
Reichsversicherungsanstalt.

y	$\lambda \bar{J}_y$	$\lambda^* \bar{J}_y^*$	$\Delta = \lambda \bar{J}_y - \lambda^* \bar{J}_y^*$	$\frac{\Delta^2}{\sum \bar{J}_y^*}$
20	349,30	249,78	+ 99,52	
21	254,39	249,32	+ 5,07	
22	185,22	248,63	− 63,41	
23	262,43	248,16	+ 14,27	
24	216,47	252,10	− 35,63	0,796
25	234,40	256,26	− 21,86	
26	201,99	262,50	− 60,51	
27	371,59	268,75	+ 102,84	
28	270,93	279,39	− 8,46	0,256
29	267,95	289,79	− 21,84	1,645
30	271,62	302,51	− 30,89	3,154
31	284,03	319,40	− 35,37	3,916
32	316,66	338,36	− 21,70	1,392
33	350,67	359,41	− 8,74	0,213
34	393,65	384,62	+ 9,03	0,212
35	461,90	411,68	+ 50,22	6,126
36	466,26	444,75	+ 21,51	1,040
37	527,16	484,07	+ 43,09	3,836
38	614,72	527,09	+ 87,63	
39	674,92	580,28	+ 94,64	
40	765,50	639,03	+ 126,47	
41	767,99	704,94	+ 63,05	
42	795,34	784,50	+ 10,84	2,411
43	824,29	874,70	− 50,41	
44	915,98	979,47	− 63,49	
45	1042,60	1103,67	− 61,07	
46	1172,90	1246,60	− 73,70	
47	1240,46	1410,81	− 170,35	
48	1437,63	1606,24	− 168,61	
49	1698,22	1832,43	− 134,21	
50	1868,96	2095,86	− 226,90	
51	2316,15	2405,54	− 89,39	
52	2546,42	2766,80	− 220,38	
53	3113,10	3186,35	− 73,25	
54	3570,40	3676,20	− 105,80	
55	4266,47	4042,31	+ 224,16	0,005
56	4996,31	4894,35	+ 101,96	
57	5658,60	5633,75	+ 24,85	
58	6464,27	6463,35	+ 0,92	
59	7994,74	7381,30	+ 613,44	
60	11509,99	8373,96	+3136,03	
61	9938,85	9402,69	+ 536,16	
62	9815,22	10413,61	− 598,39	
63	8452,96	11324,16	−2871,20	

$$\chi^2 = 25{,}002.$$

Berechnung von χ^2. Trend 4. Grades.
Reichsversicherungsanstalt.

y	$\lambda \bar{J}_y$	$\lambda^* \bar{J}_y^*$	$\Delta = \lambda \bar{J}_y - \lambda^* \bar{J}_y^*$	$\frac{\Delta^2}{\sum \bar{J}_y^*}$
20	349,30	262,31	+ 86,99	
21	254,39	254,72	− 0,33	
22	185,22	249,89	− 64,67	
23	262,43	247,13	+ 15,30	
24	216,47	246,44	− 29,97	1,327
25	234,40	248,28	− 13,88	
26	201,99	254,49	− 52,50	
27	371,59	260,70	+ 110,89	
28	270,93	271,52	− 0,59	0,001
29	267,95	281,87	− 13,92	0,687
30	271,62	296,83	− 25,21	2,141
31	284,03	313,63	− 29,60	2,793
32	316,66	332,73	− 16,07	0,776
33	350,67	358,04	− 7,37	0,015
34	393,65	383,12	+ 10,53	0,289
35	461,90	412,11	+ 49,79	6,015
36	466,26	447,31	+ 18,95	0,802
37	527,16	488,73	+ 38,43	3,021
38	614,72	533,83	+ 80,89	
39	674,92	586,76	+ 88,16	
40	765,50	649,11	+ 116,39	
41	767,99	719,06	+ 48,93	
42	795,34	800,29	+ 4,95	0,128
43	824,29	889,80	− 65,51	
44	915,98	995,87	− 79,89	
45	1042,60	1119,21	− 76,61	
46	1172,90	1259,11	− 86,21	
47	1240,46	1418,11	− 177,65	
48	1437,63	1608,17	− 170,54	
49	1698,22	1823,54	− 125,32	
50	1868,96	2085,63	− 216,67	
51	2316,15	2367,50	− 51,35	
52	2546,42	2709,43	− 163,01	
53	3113,10	3105,66	+ 7,44	
54	3570,40	3570,23	+ 0,17	
55	4266,47	3920,90	+ 345,57	0,126
56	4996,31	4747,42	+ 248,89	
57	5658,60	5475,92	+ 182,68	
58	6464,27	6313,94	+ 150,33	
59	7994,74	7266,10	+ 728,64	
60	11509,99	8333,07	+3176,92	
61	9938,85	9495,77	+ 443,08	
62	9815,22	10706,32	− 891,10	
63	8452,96	11890,88	−3437,92	

$\chi^2 = 18{,}121.$

Zur Prüfung der Anpassungsgüte mit Hilfe der χ^2-Methode können zwei Kriterien benutzt werden. Entweder wird der mittlere Fehler von χ^2 oder die Pearsonsche Wahrscheinlichkeit P verwandt. Für den mittleren Fehler von χ^2, der mit M bezeichnet werde, besteht die Beziehung:

$$M(\chi^2) = \sqrt{2(k-1)},$$

wenn k die Anzahl der Merkmale in dem zu untersuchenden Kollektiv ist[1]. Mises[2] stellt dem Ausdruck von χ^2 seinen theoretischen Wert gegenüber, der durch folgende Formel dargestellt wird:

$$k-1 \pm 0{,}674\sqrt{2(k-1)}.$$

Er bezeichnet dies auch als die „wahrscheinlichen Grenzen von χ^2". P gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, daß bei einer neuen Stichprobe aus einem Kollektiv der Wert von χ^2 ebenso groß ist wie der ursprüngliche Wert oder diesen überschreitet.

Dargestellt wird die Pearsonsche Wahrscheinlichkeit P für die Verteilungsfunktion von χ durch folgende Integralbeziehung:

$$P = \int_{\chi}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}u}\, u^{m-2}\, du \;:\; \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}u}\, u^{m-2}\, du.$$

Für χ^2 wurde für einen exponentiellen Trend 3. Grades folgender Wert erhalten:

$$\chi^2 = 25{,}002.$$

Der Kollektivgegenstand umfaßt in diesem Falle auf Grund der verschiedenen, zu Altersgruppen zusammengefaßten Alter 13 Merkmale. Es ist also $k = 13$, der Erwartungswert von χ^2, $\mathfrak{E}(\chi^2) = k-1 = 12$. Der mittlere Fehler von χ^2

$$M(\chi^2) = \sqrt{24} = 4{,}9.$$

Die Anpassung kann nach Ibsch als gut bezeichnet werden, wenn folgende Ungleichung besteht:

$$\chi^2 - \mathfrak{E}(\chi^2) < M(\chi^2)$$

„oder der Wert von $M(\chi^2)$ nicht wesentlich überschritten wird". Die Ungleichung ist hier nicht erfüllt. Die Annäherung der mit Hilfe des exponentiellen Trends 3. Grades berechneten Kurve an die empirische reicht noch nicht aus.

---

[1] Ibsch: Ein Beitrag usw. vgl. Anmerkung 2, Seite 29.

[2] v. Mises, R.: Vorlesungen aus dem Gebiet der angewandten Mathematik, Band I, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Leipzig und Wien 1931.

Nach der von Elderton[1] berechneten Tabelle ist für $\chi^2 = 25{,}002$ die Wahrscheinlichkeit

$$P = 0{,}0148.$$

Bei Anwendung des Kriteriums von Mises ergibt sich:

$$\begin{aligned} & k-1 \pm 0{,}674\sqrt{2(k-1)} \\ &= 12 \pm 0{,}674\sqrt{24} \\ &= 12 \pm 3{,}03. \end{aligned}$$

Dies wären die wahrscheinlichsten Grenzen, innerhalb derer der Wert von χ^2 liegen müßte.

Wird die empirische Kurve der Invaliditätswahrscheinlichkeiten durch einen exponentiellen Trend 4. Grades angenähert, so ist $\chi^2 = 18{,}121$. Die Vorsichtsmaßregeln wurden in diesem Falle in derselben Weise wie vorher angewandt, d. h. es wurden dieselben Altersgruppen gebildet. Die Anzahl der verschiedenen Merkmale des Kollektivgegenstandes ist $k = 13$, der Erwartungswert $\mathfrak{E}(\chi^2)$ und der mittlere Fehler $M(\chi^2)$ sind dieselben wie im ersten Fall.

Nach dem Kriterium von Ibsch ist

$$\begin{aligned} \chi^2 - \mathfrak{E}(\chi^2) &< M(\chi^2) \\ 18{,}221 - \ 12 \ &< 4{,}9. \end{aligned}$$

Für $\chi^2 = 18{,}121$ ist nach der Tabelle von Elderton die Pearsonsche Wahrscheinlichkeit

$$P = 0{,}1120.$$

Das Kriterium von Mises ergibt:

$$\begin{aligned} & k_{-1} \pm 0{,}674\sqrt{2(k-1)} \\ & 12 \pm 3{,}03. \end{aligned}$$

Auf Grund dieser Ergebnisse der Kriterien erkennt man, daß die Anpassung des exponentiellen Trends 4. Grades als gut bezeichnet werden kann.

D. Die Konstanten a_ν.

Werden Invaliditätstafeln mit verschiedenen Invaliditätswahrscheinlichkeiten nach dieser Methode ausgeglichen, so zeigt sich, daß die entsprechenden Konstanten a_ν bzw. a'_ν sich in derselben Größenordnung bewegen. Dies wird aus nachstehender Tabelle ersichtlich:

[1] Elderton, P.: Tables for Testing the goodness of fit of theory to observation, Biometrica, vol. I, 1901/02.

Zusammenstellung der Konstanten der verschiedenen Invaliditätstafeln (Logarithmen).

Ottaviani[1]:

$a_0 = 2{,}65672$
$a_1 = 0{,}61739$
$a_2 = 0{,}17703$
$a_3 = 0{,}92018 - 1$

Riedel[2]:

$a_0 = 2{,}68597$
$a_1 = 0{,}55296$
$a_2 = 0{,}20282$
$a_3 = 0{,}00781$

Leubin-Hoffstetter[3]:

$a_0 = 3{,}13256$
$a_1 = 0{,}72347$
$a_2 = 0{,}13418$
$a_3 = 0{,}90421 - 1$

Pfaffenberger[4]:

$a_0 = 2{,}92205$
$a_1 = 0{,}69054$
$a_2 = 0{,}19874$
$a_3 = 0{,}96872 - 1$

Reichsversicherungsanstalt[5]:

1934:

$a_0 = 2{,}71863$
$a_1 = 0{,}60824$
$a_2 = 0{,}15814$
$a_3 = 0{,}99353 - 1$

1935:

$a_0 = 2{,}63069$
$a_1 = 0{,}56653$
$a_2 = 0{,}18319$
$a_3 = 0{,}00963$

Zimmermann[6]:

$a_0 = 2{,}86633$
$a_1 = 0{,}67172$
$a_2 = 0{,}00281$
$a_3 = 0{,}01936.$

Numerische Werte der Konstanten.

Ottaviani:

$a_0 = 485{,}26$
$a_1 = 3{,}5724$
$a_2 = 1{,}5032$
$a_3 = 0{,}8321$

Riedel:

$a_0 = 453{,}65$
$a_1 = 2{,}1438$
$a_2 = 1{,}5952$
$a_3 = 1{,}0182$

---

[1] Ottaviani: vgl. Anmerkung 2, Seite 10.

[2] Riedel: Invaliditätswahrscheinlichkeiten der Bürobeamten italienischer Eisenbahnen, 1902—1914, Blätter für Versicherungsmathematik, III. Band, 4. Heft, S. 138, Berlin 1934.

[3] Leubin-Hoffstetter: Mitteilungen der Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker, Bern 1917.

[4] Pfaffenberger: Beobachtungen 1928—1932 der Statistik der deutschen Privatpensionskassen an Ersatzkassen, Blätter für Versicherungsmathematik, III. Band, 12. Heft, Seite 478, Berlin 1936.

[5] Statistische Sonderhefte der Reichsversicherungsanstalt für Angestellte, Heft 3 und Heft 5, Berlin 1936/37.

[6] Zimmermann, A.: Beiträge zur Theorie der Dienstunfähigkeits- und Sterbensstatistik der Vereins deutscher Eisenbahnverwaltungen, Heft 2, Berlin 1885.

Leubin-Hofstetter:

$a_0 = 1356{,}90$
$a_1 = 5{,}2901$
$a_2 = 1{,}3620$
$a_3 = 0{,}9076$

Pfaffenberger:

$a_0 = 835{,}70$
$a_1 = 4{,}9039$
$a_2 = 1{,}5803$
$a_3 = 0{,}9305$

Reichsversicherungsanstalt:

1934:

$a_0 = 523{,}15$
$a_1 = 4{,}0573$
$a_2 = 1{,}4393$
$a_3 = 0{,}9853$

1935:

$a_0 = 427{,}26$
$a_1 = 3{,}6857$
$a_2 = 1{,}4247$
$a_3 = 1{,}0224$

Zimmermann:

$a_0 = 734{,}93$
$a_1 = 4{,}6957$
$a_2 = 1{,}0055$
$a_3 = 1{,}0456.$

Es ergibt sich das Problem, zwischen den Konstanten a_ν verschiedener Tafeln mathematische Beziehungen zu finden.

Im folgenden werden immer zwei Tafeln mit den Invaliditätswahrscheinlichkeiten i_y und i'_y miteinander verglichen. Die Konstanten a_ν seien die Konstanten der Tafel mit den Wahrscheinlichkeiten i_y, die Konstanten a'_ν seien die der Tafel mit den Wahrscheinlichkeiten i'_y. Dann soll eine Beziehung folgender Form gefunden werden:

$$a'_\nu = f(c,\ a).$$

Wir beschränken uns hierbei immer auf eine gerade Anzahl N von Beobachtungen.

Allgemeiner Fall:

Für zwei gegebene Reihen i'_y und i_y lassen sich nun immer Anordnungen so finden, daß $i'_y = c_y \cdot i_y$ ist. Diese Annahme entspricht dem allgemeinen Fall. Man kann also nun $c_y = \frac{i'_y}{i_y}$ schreiben. Was läßt sich nun über die Konstanten a'_ν und a_ν in diesem Fall aussagen?

Es sei:

$$i'_y = c_y \cdot i_y.$$

Dann ist:

$$\log i'_y = \log c_y + \log i_y; \qquad \log c_y = \log\left(\frac{i'_y}{i_y}\right).$$

Zur Abkürzung wird gesetzt:

$$\log c_y = \beta(i_y); \qquad \log i_y = \alpha(i_y).$$

Bei der Berechnung der Trendkonstanten a'_ν wird das schon erwähnte umstehende Schema von Tschetwerikoff benutzt.

y	$i_y \cdot c_y$	$\log(i_y \cdot c_y)$	$S'_0 = s'_0 + s'_{-1}$	$S'_1 = s'_1 - s'_{-1}$
22	$i_{22} \cdot c_{22}$	$\log i_{22} + \log c_{22}$	$\alpha_{22} + \beta_{22}$	$\alpha_{22} + \beta_{22}$
23	$i_{23} \cdot c_{23}$	$\log i_{23} + \log c_{23}$	$\sum_{y=22}^{23} \alpha(i_y) + \sum_{y=22}^{23} \beta(i_y)$	$\alpha_{22} + \sum_{y=22}^{23} \alpha(i_y) + \beta_{22} + \sum_{y=22}^{23} \beta(i_y)$
24	$i_{24} \cdot c_{24}$	$\log i_{24} + \log c_{24}$	$\sum_{y=22}^{24} \alpha(i_y) + \sum_{y=22}^{24} \beta(i_y)$	$\alpha_{22} + \sum_{y=22}^{23} \alpha(i_y) + \sum_{y=22}^{24} \alpha(i_y) + \beta_{22} + \sum_{y=22}^{23} \beta(i_y) + \sum_{y=}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
42	$i_{42} \cdot c_{42}$	$\log i_{42} + \log c_{42}$	$\sum_{y=22}^{42} \alpha(i_y) + \sum_{y=22}^{42} \beta(i_y)$	$\alpha_{22} + \sum_{y=22}^{23} \alpha(i_y) + \sum_{y=22}^{24} \alpha(i_y) + \ldots + \sum_{y=22}^{42} \alpha(i_y) +$
				$+ \sum_{y=22}^{23} \beta(i_y) + \sum_{y=22}^{24} \beta(i_y) + \ldots + \sum_{y=22}^{42} \beta($
43	$i_{43} \cdot c_{43}$	$\log i_{43} + \log c_{43}$	$\sum_{y=22}^{43} \alpha(i_y) + \sum_{y=22}^{43} \beta(i_y)$	
44	$i_{44} \cdot c_{44}$	$\log i_{44} + \log c_{44}$	$\sum_{y=44}^{65} \alpha(i_y) + \sum_{y=44}^{65} \beta(i_y)$	$+ \sum_{y=64}^{65} \beta(i_y) + \sum_{y=63}^{65} \beta(i_y) + \ldots + \sum_{y=44}^{65} \beta(i_y$
				$\alpha_{65} + \sum_{y=64}^{65} \alpha(i_y) + \sum_{y=63}^{65} \alpha(i_y) + \ldots + \sum_{y=44}^{65} \alpha(i_y)$
				$+ \sum_{y=64}^{65} \beta(i_y) + \sum_{y=63}^{65} \beta(i_y) + \ldots + \sum_{y=45}^{65} \beta(i_y)$
45	$i_{45} \cdot c_{45}$	$\log i_{45} + \log c_{45}$	$\sum_{y=45}^{65} \alpha(i_y) + \sum_{y=45}^{65} \beta(i_y)$	$\alpha_{65} + \sum_{y=64}^{65} \alpha(i_y) + \sum_{y=63}^{65} \alpha(i_y) + \ldots + \sum_{y=45}^{65} \alpha(i_y)$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
63	$i_{63} \cdot c_{63}$	$\log i_{63} + \log c_{63}$	$\sum_{y=63}^{65} \alpha(i_y) + \sum_{y=63}^{65} \beta(i_y)$	$\alpha_{65} + \sum_{y=64}^{65} \alpha(i_y) + \sum_{y=63}^{65} \alpha(i_y) + \beta_{65} + \sum_{y=64}^{65} \beta(i_y) +$
64	$i_{64} \cdot c_{64}$	$\log i_{64} + \log c_{64}$	$\sum_{y=64}^{65} \alpha(i_y) + \sum_{y=64}^{65} \beta(i_y)$	$\alpha_{65} + \sum_{y=64}^{65} \alpha(i_y) + \beta_{65} + \sum_{y=64}^{65} \beta(i_y)$
65	$i_{65} \cdot c_{65}$	$\log i_{65} + \log c_{65}$	$\alpha_{65} + \beta_{65}$	$\alpha_{65} + \beta_{65}$

$$S_2' = s_2' + s_{-2}'$$

$$\alpha_{22} + \beta_{22}$$

$$2\,\alpha_{22} + \sum_{y=22}^{23} \alpha(i_y) + 2\,\beta_{22} + \sum_{y=22}^{23} \beta(i_y)$$

$$3\,\alpha_{22} + 2\sum_{y=22}^{23} \alpha(i_y) + \sum_{y=22}^{24} \alpha(i_y) + \beta_{22} + 2\sum_{y=22}^{23} \beta(i_y) + \sum_{y=22}^{24} \beta(i_y)$$

$$21\,\alpha_{22} + 20\sum_{y=22}^{23} \alpha(i_y) + 19\sum_{y=22}^{24} \alpha(i_y) + \ldots + 2\sum_{y=22}^{41} \alpha(i_y) + \sum_{y=22}^{42} \alpha(i_y) + 21\,\beta_{22} + 20\sum_{y=22}^{23} \beta(i_y)$$
$$+ 19\sum_{y=22}^{24} \beta(i_y) + \ldots + 2\sum_{y=22}^{41} \beta(i_y) + \sum_{y=22}^{42} \beta(i_y)$$

$$+ 19\sum_{y=63}^{65} \beta(i_y) + \ldots + 2\sum_{y=46}^{65} \beta(i_y) + \sum_{y=45}^{65} \beta(i_y)$$

$$21\,\alpha_{65} + 20\sum_{y=64}^{65} \alpha(i_y) + 19\sum_{y=63}^{65} \alpha(i_y) + \ldots + 2\sum_{y=46}^{65} \alpha(i_y) + \sum_{y=45}^{65} \alpha(i_y) + 21\,\beta_{65} + 20\sum_{y=64}^{65} \beta(i_y)$$

$$3\,\alpha_{65} + 2\sum_{y=64}^{65} \alpha(i_y) + \sum_{y=63}^{65} \alpha(i_y) + 3\,\beta_{65} + 2\sum_{y=64}^{65} \beta(i_y) + \sum_{y=63}^{65} \beta(i_y)$$

$$2\,\alpha_{65} + \sum_{y=64}^{65} \alpha(i_y) + 2\,\beta_{65} + \sum_{y=64}^{65} \beta(i_y)$$

$$\beta_{65} + \beta_{65}$$

Es sei $N = 44$, das Alter y nehme die Werte 22, 23, 24 ... 65 an. Dann werden die Konstanten a'_y nach den Formeln von Tschetwerikoff berechnet[1].

Berechnung von a'_0.

Es ist:

$$a_0 = \frac{S_0}{N}; \quad S_0 = s_0 + s_{-0}; \quad S_0 = \sum_{y=22}^{43} \alpha(i_y) + \sum_{y=44}^{65} \alpha(i_y) = \sum_{y=22}^{65} \alpha(i_y);$$

$$a_0 = \frac{\sum_{y=22}^{65} \alpha(i_y)}{N}; \quad a'_0 = \frac{S'_0}{N}; \quad S'_0 = s'_0 + s'_{-0}; \quad s'_0 = \sum_{y=44}^{65} \alpha(i_y) + \sum_{y=44}^{65} \beta(i_y);$$

$$s'_{-0} = \sum_{y=22}^{43} \alpha(i_y) + \sum_{y=22}^{43} \beta(i_y).$$

$$a'_0 = \frac{\sum_{y=44}^{65} \alpha(i_y) + \sum_{y=44}^{65} \beta(i_y) + \sum_{y=22}^{43} \alpha(i_y) + \sum_{y=22}^{43} \beta(i_y)}{N} = \frac{\sum_{y=22}^{65} \alpha(i_y) + \sum_{y=22}^{65} \beta(i_y)}{N}.$$

Da aber:

$$a_0 = \frac{\sum_{y=22}^{65} \alpha(i_y)}{N},$$

so ist:

$$a'_0 = a_0 + a_{z_0},$$

wobei:

$$a_{z_0} = \frac{\sum_{y=22}^{65} \beta(i_y)}{N}.$$

Berechnung von a'_1.

Es ist:

$$a_1 = R_1 = \frac{2\,S_1 - S_0}{1000}\,k_1; \quad S_1 = s_1 - s_{-1};$$

$$s_1 = 22\,a_{65} + 21\,a_{64} + 20\,a_{63} + \ldots + 2\,a_{45} + a_{44};$$

$$s_{-1} = 21\,a_{22} + 20\,a_{21} + 19\,a_{20} + \ldots + 2\,a_{41} + a_{42};$$

[1] Vgl. Seite 13ff.

$$s_1 = \sum_{y=44}^{65} (y-43)\,\alpha(i_y); \qquad s_{-1} = \sum_{y=22}^{42} (43-y)\,\alpha(i_y);$$

$$S_1 = \sum_{y=44}^{65} (y-43)\,\alpha(i_y) - \sum_{y=22}^{42} (43-y)\,\alpha(i_y).$$

Also wird:

$$a_1 = R_1 = \frac{2\,S_1 - S_0}{1000}\,k_1 =$$

$$= \frac{2\left[\sum_{y=44}^{65} (y-43)\,\alpha(i_y) - \sum_{y=22}^{42} (43-y)\,\alpha(i_y)\right] - \sum_{y=22}^{65} \alpha(i_y)}{1000}\,k_1.$$

Es ist:

$$a_1' = R_1' = \frac{2\,S_1' - S_0'}{1000}\,k_1; \qquad S_1' = s_1' \quad s_{-1}';$$

$$s_1' = 22\,\alpha_{65} + 21\,\alpha_{64} + 20\,\alpha_{63} + \ldots + 2\,\alpha_{45} + \alpha_{44} + 22\,\beta_{65} + 21\,\beta_{64} + 20\,\beta_{63} + \ldots + 2\,\beta_{45} + \beta_{44};$$

$$s_1' = \sum_{y=44}^{65} (y-43)\,\alpha(i_y) + \sum_{y=44}^{65} (y-43)\,\beta(i_y);$$

$$s_{-1}' = 21\,\alpha_{22} + 20\,\alpha_{23} + 19\,\alpha_{24} + \ldots + 2\,\alpha_{41} + \alpha_{42} + 21\,\beta_{22} + 20\,\beta_{23} + 19\,\beta_{24} + \ldots + 2\,\beta_{41} + \beta_{42};$$

$$s_{-1}' = \sum_{y=22}^{42} (43-y)\,\alpha(i_y) + \sum_{y=22}^{42} (43-y)\,\beta(i_y);$$

$$S_1' = s_1' - s_{-1}' = \sum_{y=44}^{65} (y-43)\,\alpha(i_y) - \sum_{y=22}^{42} (43-y)\,\alpha(i_y) + \sum_{y=44}^{65} (y-43)\,\beta(i_y) - \sum_{y=22}^{42} (43-y)\,\beta(i_y);$$

$$a_1' = 2\,\frac{\sum_{y=44}^{65} (y-43)\,\alpha(i_y) - \sum_{y=22}^{42} (43-y)\,\alpha(i_y) + \sum_{y=44}^{65} (y-43)\,\beta(i_y) - \sum_{y=22}^{42} (43-y)\,\beta(i_y)}{1000}\,k_1$$

$$- \frac{\sum_{y=22}^{65} \alpha(i_y) + \sum_{y=22}^{65} \beta(i_y)}{1000}\,k_1;$$

$$a_1' = \frac{2\left[\sum_{y=44}^{65}(y-43)\,\alpha(i_y) - \sum_{y=22}^{42}(43-y)\,\alpha(i_y)\right] - \sum_{y=22}^{65}\alpha(i_y)}{1000} k_1$$

$$+ \frac{2\left[\sum_{y=44}^{65}(y-43)\,\beta(i_y) - \sum_{y=22}^{42}(43-y)\,\beta(i_y)\right] - \sum_{y=22}^{65}\beta(i_y)}{1000} k_1 .$$

Der erste Ausdruck in $\alpha(i_y)$ stellt aber die Konstante a_1 dar. Also wird

$$a_1' = a_1 + \frac{2\left[\sum_{y=44}^{65}(y-43)\,\beta(i_y) - \sum_{y=22}^{42}(43-y)\,\beta(i_y)\right] - \sum_{y=22}^{65}\beta(i_y)}{1000} k_1 .$$

$a_1' = a_1 + a_{z_1}$, wobei a_{z_1} der Ausdruck in $\beta(i_y)$ ist.

Berechnung von a_2'.

Es ist:

$$a_2 = R_2 - R_0 ; \qquad R_2 = \frac{S_2}{1000} k_2 = \frac{s_2 + s_{-2}}{1000} k_2 ; \qquad R_0 = \frac{S_0}{N} k_0 ;$$

$$s_2 = 21\,\alpha_{65} + 20\sum_{y=64}^{65}\alpha(i_y) + 19\sum_{y=63}^{65}\alpha(i_y) + \ldots + 2\sum_{y=46}^{65}\alpha(i_y) + \sum_{y=45}^{65}\alpha(i_y)$$

$$= 21\,\alpha_{65} + \sum_{K=1}^{20} K \sum_{y=44+K}^{65}\alpha(i_y) ;$$

$$s_{-2} = 21\,\alpha_{22} + 20\sum_{y=22}^{23}\alpha(i_y) + 19\sum_{y=22}^{24}\alpha(i_y) + \ldots + 2\sum_{y=22}^{41}\alpha(i_y) + \sum_{y=22}^{42}\alpha(i_y)$$

$$= 21\,\alpha_{22} + \sum_{K=1}^{20} K \sum_{y=22}^{43-K}\alpha(i_y) ;$$

$$S_2 = s_2 + s_{-2} = 21\,(\alpha_{22} + \alpha_{65}) + \sum_{K=1}^{20} K \sum_{y=22}^{43-K}\alpha(i_y) + \sum_{K=1}^{20} K \sum_{y=44+K}^{65}\alpha(i_y) .$$

Also wird:

$$a_2 = R_2 - R_0$$

$$= \frac{21\,(\alpha_{22} + \alpha_{65}) + \sum_{K=1}^{20} K \sum_{y=22}^{43-K}\alpha(i_y) + \sum_{K=1}^{20} K \sum_{y=44+K}^{65}\alpha(i_y)}{1000} k_2 - \frac{\sum_{y=22}^{65}\alpha(i_y)}{N} k_0 .$$

Es ist:

$$a_2' = R_2' - R_0'; \qquad R_2' = \frac{S_2'}{1000} k_2 = \frac{s_2' + s'_{-2}}{1000} k_2; \qquad R_0' = \frac{S_0'}{N} k_0;$$

$$s_2' = 21\,a_{65} + 20\sum_{y=64}^{65} a(i_y) + 19\sum_{y=63}^{65} a(i_y) + \ldots + 2\sum_{y=46}^{65} a(i_y) + \sum_{y=45}^{65} a(i_y)$$
$$+ 21\,\beta_{65} + 20\sum_{y=64}^{65} \beta(i_y) + 19\sum_{y=63}^{65} \beta(i_y) + \ldots + 2\sum_{y=46}^{65} \beta(i_y) + \sum_{y=45}^{65} \beta(i_y).$$

$$s_2' = 21\,a_{65} + \sum_{K=1}^{20} K \sum_{y=44+K}^{65} a(i_y) + 21\,\beta_{65} \sum_{K=1}^{20} K \sum_{y=44+K}^{65} \beta(i_y);$$

$$s'_{-2} = 21\,a_{22} + 20\sum_{y=22}^{23} a(i_y) + 19\sum_{y=22}^{24} a(i_y) + \ldots + 2\sum_{y=22}^{41} a(i_y) + \sum_{y=22}^{42} a(i_y)$$
$$+ 21\,\beta_{22} + 20\sum_{y=22}^{23} \beta(i_y) + 19\sum_{y=22}^{24} \beta(i_y) + \ldots + 2\sum_{y=22}^{41} \beta(i_y) + \sum_{y=22}^{42} \beta(i_y).$$

$$s'_{-2} = 21\,a_{22} + \sum_{K=1}^{20} K \sum_{y=22}^{43-K} a(i_y) + 21\,\beta_{22} + \sum_{K=1}^{20} K \sum_{y=22}^{43-K} \beta(i_y); \quad S_2' = s_2' + s'_{-2};$$

$$S_2' = 21\,(a_{22} + a_{65}) + \sum_{K=1}^{20} K \sum_{y=22}^{43-K} a(i_y) + \sum_{K=1}^{20} K \sum_{y=44+K}^{65} a(i_y) + 21\,(\beta_{22} + \beta_{65})$$
$$+ \sum_{K=1}^{20} K \sum_{y=22}^{43-K} \beta(i_y) + \sum_{K=1}^{20} K \sum_{y=44+K}^{65} \beta(i_y);$$

$$a_2' = \frac{\left\{ \begin{array}{l} 21\,(a_{22} + a_{65}) + \sum\limits_{K=1}^{20} K \sum\limits_{y=22}^{43-K} a(i_y) + \sum\limits_{K=1}^{20} K \sum\limits_{y=44+K}^{65} a(i_y) \\ + 21\,(\beta_{22} + \beta_{65}) + \sum\limits_{K=1}^{20} K \sum\limits_{y=22}^{43-K} \beta(i_y) + \sum\limits_{K=1}^{20} K \sum\limits_{y=44+K}^{65} \beta(i_y) \end{array} \right\}}{1000} k_2$$
$$- \frac{\sum\limits_{y=22}^{65} a(i_y) + \sum\limits_{y=22}^{65} \beta(i_y)}{N} k_0 = R_2' - R_0' = \frac{S_2'}{1000} k_2 - \frac{S_0'}{N} k_0.$$

$$a_2' = \frac{21(a_{22}+a_{65}) + \sum_{K=1}^{20} K \sum_{y=22}^{43-K} \alpha(i_y) + \sum_{K=1}^{20} K \sum_{y=44+K}^{65} \alpha(i_y)}{1000} k_2 - \frac{\sum_{y=22}^{65} \alpha(i_y)}{N} k_0$$

$$+ \frac{21(\beta_{22}+\beta_{65}) + \sum_{K=1}^{20} K \sum_{y=22}^{43-K} \beta(i_y) + \sum_{K=1}^{20} K \sum_{y=44+K}^{65} \beta(i_y)}{1000} k_2 - \frac{\sum_{y=22}^{65} \beta(i_y)}{N} k_0 .$$

Der erste Ausdruck in $\alpha(i_y)$ stellt die Konstante a_2 dar. Es ist also:

$$a_2' = a_2 + \frac{21(\beta_{22}+\beta_{65}) + \sum_{K=1}^{20} K \sum_{y=22}^{43-K} \beta(i_y) + \sum_{K=1}^{20} K \sum_{y=44+K}^{65} \beta(i_y)}{1000} k_2 - \frac{\sum_{y=22}^{65} \beta(i_y)}{N} k_0$$

oder:

$$a_2' = a_2 + a_{z_2},$$

wobei a_{z_2} der Ausdruck in $\beta(i_y)$ ist. Aus diesen Konstantenuntersuchungen ergibt sich folgendes:

Unter Zugrundelegung des allgemeinen Falles $i_y' = c_y \cdot i_y$ lassen sich die Konstanten a_ν' der Tafel i_y' aus den Konstanten a_ν der Tafel i_y für gleiches gerades N mit Hilfe der abgeleiteten Beziehungen

$$a_0' = a_0 + a_{z_0}$$

$$a_1' = a_1 + a_{z_1}$$

$$a_2' = a_2 + a_{z_2}$$

ausdrücken und berechnen. Für die höheren Konstanten würden sich entsprechende Beziehungen zwischen den a_ν' und den a_ν ergeben, d. h. wir haben die allgemeinen Beziehungen zwischen den a_ν' und den a_ν gefunden. Diese Beziehungen können somit auch in jedem Falle zur Kontrolle der nach dem Schema von Tschetwerikoff berechneten Konstanten (siehe Beispiel) dienen, weil ja die Voraussetzungen den allgemeinen Fall enthalten.

Die Konstanten werden nach dieser Annahme für einen konkreten Fall durchgerechnet. Es werden die Tafeln von Zimmermann und von Leubin-Hoffstetter benutzt, wobei die Zimmermannschen Tafeln verhältnismäßig niedrige und die Tafeln von Leubin-Hoffstetter ziemlich hohe Invaliditätswahrscheinlichkeiten aufweisen. Die Anzahl der Beobachtungen sei für beide Tafeln $N = 44$. Das Alter y durchlaufe für beide Tafeln das Intervall 22, 23, 24 .... 65.

Die Zimmermannsche Tafel sei die Tafel mit den Wahrscheinlichkeiten i_y und den Konstanten a_ν, während die Leubin-Hoffstettersche Tafel die Wahrscheinlichkeiten i'_y und die Konstanten a'_ν habe. Dann ergibt sich aus der numerischen Berechnung für die Konstanten a'_ν:

$$a'_0 = a_0 + a_{z_0}, \qquad a_{z_0} = \frac{\sum_{y=22}^{65} \beta(i_y)}{N}.$$

Nach der Zusammenstellung der Konstanten[1] ist

für die Tafel von Leubin-Hoffstetter . . . . $a'_0 = 3{,}13256$,
für die Tafel von Zimmmermann ist . . . . . $a_0 = 2{,}86623$.

Es muß also sein:

$$3{,}13256 = 2{,}86623 + 0{,}26633,$$

wobei:

$$a_{z_0} = \frac{\sum_{y=22}^{65} \beta(i_y)}{44} = 0{,}26633.$$

Es ist

$a'_1 = 0{,}72347$ für die Tafel von Leubin-Hoffstetter,
$a_1 = 0{,}67172$ für die Tafel von Zimmermann.

Zwischen a'_1 und a_1 besteht die Beziehung:

$$a'_1 = a_1 + a_{z_1};$$

$$a_{z_1} = \frac{2\left[\sum_{y=44}^{65}(y-43)\,\beta(i_y) - \sum_{y=22}^{42}(43-y)\,\beta(i_y)\right] - \sum_{y=22}^{65}\beta(i_y)}{1000} k_1.$$

Daher muß sein:

$$0{,}72348 = 0{,}67172 + 0{,}05176; \qquad a_{z_1} = 0{,}05176.$$

Es ist:

$a'_2 = 0{,}13418$ für die Tafel von Leubin-Hoffstetter,
$a_2 = 0{,}00281$ für die Tafel von Zimmermann.

Zwischen a'_2 und a_2 besteht die Beziehung:

$$a'_2 = a_2 + a_{z_2},$$

[1] Vgl. Seite 34 und 35.

wobei:

$$a_{z_2} = \frac{21(\beta_{22}+\beta_{65}) + \sum_{K=1}^{20} K \sum_{y=22}^{43-K} \beta(i_y) + \sum_{K=1}^{20} K \sum_{y=44+K}^{65} \beta(i_y)}{1000} k_2 - \frac{\sum_{y=22}^{65} \beta(i_y)}{44} k_0 .$$

Daher muß sein:

$$0{,}13418 = 0{,}00281 + 0{,}13137; \qquad a_{z_2} = 0{,}13137.$$

Spezieller Fall:

Es sei:

$$i'_y = c_y \cdot i_y = u \cdot i_y,$$

wobei u eine beliebige Konstante sein soll. Dann ist:

$$\log i'_y = \log u + \log i_y,$$
$$\log i'_y = \varepsilon + \alpha(i_y),$$

wo

$$\log u = \varepsilon,$$
$$\log i_y = \alpha(i_y)$$

ist. Unter Benutzung der abgeleiteten allgemeinen Beziehungen zwischen den a_ν und den a'_ν

$$a'_0 = a_0 + a_{z_0}$$
$$a'_1 = a_1 + a_{z_1}$$
$$a'_2 = a_2 + a_{z_2}$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

ergeben sich jetzt für diesen speziellen Fall folgende Beziehungen:

$$a'_0 = a_0 + a_{z_0}; \qquad a_{z_0} = \frac{\sum_{y=22}^{65} \beta(i_y)}{N}.$$

Dabei ist:

$$\beta(i_y) = \log u = \varepsilon.$$

Daraus ergibt sich:

$$a'_0 = a_0 + \frac{44\varepsilon}{44} = a_0 + \varepsilon.$$

$a'_1 = a_1 + a_{z_1}$;

$$a_{z_1} = \frac{2\left[\sum_{y=44}^{65} (y-43)\beta(i_y) - \sum_{y=22}^{42} (43-y)\beta(i_y)\right] - \sum_{y=22}^{65} \beta(i_y)}{1000} k_1 .$$

Hieraus folgt:

$$a_{z_1} = \frac{44\varepsilon - 44\varepsilon}{1000} k_1 = 0.$$

Also ist:

$$a_1' = a_1.$$

Für a_2' ergibt sich:

$$a_2' = a_2 + a_{z_2};$$

$$a_{z_2} = \frac{21(\beta_{22} + \beta_{65}) + \sum_{K=1}^{20} K \sum_{y=22}^{43-K} \beta(i_y) + \sum_{K=1}^{20} K \sum_{y=44+K}^{65} \beta(i_y)}{1000} k_2 - \frac{\sum_{y=22}^{65} \beta(i_y)}{N} k_0;$$

$$a_{z_2} = \frac{(42\varepsilon + 3500\varepsilon) k_2}{1000} - \frac{44\varepsilon \cdot k_0}{44};$$

$$a_{z_2} = 1{,}11717\varepsilon - 1{,}11717\varepsilon.$$

Mithin ist:

$$a_2' = a_2.$$

Zwischen den Konstanten a_ν' und a_ν der Tafeln i_y' und i_y bestehen daher folgende Zusammenhänge:

$$a_0' = a_0 + \varepsilon,$$

$$a_\lambda' = a_\lambda; \qquad \lambda > 0.$$

In dem vorstehenden speziellen Fall stimmen, wie soeben dargestellt worden ist, die Konstanten für beide Tafeln völlig überein. Eine Ausnahme macht lediglich a_0', das sich von a_0 nur durch einen festen Betrag ε unterscheidet.

E. Schlußbetrachtung.

In dieser Arbeit wurde gezeigt, daß es möglich ist, die Invaliditätswahrscheinlichkeit i_y mit Hilfe eines exponentiellen Trends darzustellen. Dabei wurden ganze rationale orthogonale Funktionen, und zwar Tschebyscheffsche Polynome, die in der Konjunkturforschung zur Ausgleichung von Wirtschaftskurven eine große Rolle spielen, benutzt. Der Vorteil der Verwendung dieser Polynome besteht darin, die

Näherungsfunktionen mit beliebig hohem Näherungsgrad anzusetzen. Für den speziellen Fall der Ausgleichung der Invaliditätswahrscheinlichkeiten genügt es im allgemeinen, eine Näherungsfunktion 2. oder 3. Grades zu verwenden. Eine Kontrolle darüber, ob die Ausgleichung genügt, bietet die χ^2-Methode. Unter Umständen ist es erforderlich, der Näherungsfunktion noch ein Glied hinzuzufügen.

Für die Konstanten a_ν ergeben sich unter bestimmten Voraussetzungen gewisse Beziehungen. Bei geradem gleichen N ist es bei mehreren Invaliditätstafeln möglich, mit Hilfe der gefundenen Beziehungen die Konstanten der einen Tafel aus den Konstanten der anderen Tafel mit Hilfe eines Zusatzgliedes zu berechnen. Die Beziehungen können unter Zugrundelegung des allgemeinen Falles auch als Kontrolle der Konstantenberechnung dienen.

Lebenslauf.

Am 6. März 1910 wurde ich, Willy Karl Bernhard Schnurr, als Sohn des Bezirksdirektors Willy Schnurr in Erfurt geboren. Nach bestandener Reifeprüfung arbeitete ich von April bis Oktober 1928 als Praktikant in einer Erfurter Maschinenfabrik. Im Anschluß daran studierte ich zwei Semester Elektrotechnik an der Technischen Hochschule Darmstadt. Nach dem Wechsel meines Studiums studierte ich an den Universitäten Göttingen, Frankfurt a. M. und Hamburg Mathematik, Physik und Staatswissenschaften. Im Sommer 1933 bestand ich an der Universität Frankfurt a. M. das Abschlußexamen für Versicherungsmathematiker. In Hamburg begann ich auf Anregung von Herrn Prof. Dr. Riebesell mit meiner Dissertation, die ich nach Übersiedlung des Herrn Prof. Dr. Riebesell nach Berlin hier fortsetzte und fertigstellte.

Meinen besonderen Dank möchte ich an dieser Stelle Herrn Prof. Dr. Riebesell für sein freundliches Interesse an der Arbeit sowie für die während ihrer Entstehung gegebenen Anregungen aussprechen. Ebenfalls gebührt dem Korreferenten meiner Arbeit, Herrn Prof. Dr. Klose, mein Dank.